自动化与智能化技术

基于混合整数规划的工厂产品托盘打包及装箱问题研究

张晶蓉，贺占文，周艳杰*，李玉民
（郑州大学 管理学院，郑州 450001）

摘要：目的 针对工厂产品的托盘打包及装箱问题，提出一种优化产品在托盘上的布局以及托盘与产品整体在集装箱中的布局方法，以最大化集装箱的空间利用。**方法** 在满足现实约束的条件下，以最大化产品装载体积为目标建立混合整数规划模型。考虑问题的复杂性，本文将所研究的问题分解为 2 个子问题，并建立两阶段装载模型进行求解。第 1 阶段，建立二维集装箱装载模型，确定多种托盘类型在集装箱底面的平面布局；第 2 阶段，建立三维托盘装载模型，确定产品在托盘上的立体布局。鉴于精确求解该问题耗时较大，本文针对 2 个子问题设计两阶段启发式算法求解。为验证模型及算法的有效性，采用 2 组不同规模大小的算例进行测试。**结果** 算例结果表明，在小、大 2 种规模算例中，装载率平均差值分别为 0 和−0.5%，计算时间相差较大，本文提出的模型及算法在合理的时间内获得了最优解或近似最优解。**结论** 本研究能够为工厂产品的托盘打包及装箱提供快速高效的解决方案。

关键词：集装箱；装载；托盘打包；工厂产品；混合整数规划；启发式算法
中图分类号：U294.3 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3563(2023)17-0143-09
DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2023.17.017

Pallet Packing and Container Loading of Factory Products Based on Mixed Integer Programming Approach

ZHANG Jing-rong, HE Zhan-wen, ZHOU Yan-jie, LI Yu-min*
(School of Management, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

ABSTRACT: The work aims to propose a method to optimize the layout of products on pallets and the layout of pallets and products in containers to maximize container space utilization, thus solving the problem in pallet packing and container loading of factory products. A mixed integer programming model was developed to optimize the volume of the loaded product under realistic constraints. Due to the complexity of the problem, the studied problem was divided into two sub-problems and a two-stage loading model was established for solution. In the first stage, a two-dimensional container loading model was established to determine the plane layout of pallets on the bottom of containers. In the second stage, a three-dimensional pallet loading model was established to determine the 3D layout of products on the pallet. In view of that accurate solution was time-consuming, a two-stage heuristic algorithm was designed to solve the two sub-problems. To verify the effectiveness of the model and algorithm, two groups of examples with different sizes were adopted. The results showed that the average difference of loading rate was 0 and −0.5% in small and large-scale experimental cases, respectively, but the calculation time was quite different. The model and algorithm proposed could obtain the optimal so-

收稿日期：2022-12-02
基金项目：国家自然科学基金资助项目（72201252）；河南省社科规划决策咨询项目（2022JC10）；河南省高校智库研究项目（2023ZKYJ21）

lution or approximate optimal solution in a reasonable time. This study can provide a fast and efficient solution for pallet packing and container loading of factory products.

KEY WORDS: container; loading; pallet packing; factory products; mixed integer programming; heuristic algorithm

随着工厂仓库的产品数量及种类的增多，在产品出库时，托盘可将多种类型产品归置整理成规格统一且具有一定体积形状的产品单元，以促进包装的标准化与模块化。通过将产品整齐码放在托盘上、打包再到集装箱装箱，提高了整个作业流程的效率。在运输过程中，带托盘运输能有效提高装卸效率，减少人工装卸费用，减少货损，便于产品数量统计及计价，降低运输过程总时长。但大多工厂在解决产品的托盘打包和装箱问题时，往往采用基于人工经验知识的集装箱装载和规划模式，导致集装箱装载方案的鲁棒性不高，装载率普遍较低。因此，有必要对产品的托盘打包及装箱问题进行建模与优化，以提高集装箱的空间利用率。

产品的托盘打包及装箱问题包含了集装箱装载（Container Loading Problem，CLP）和托盘装载（Pallet Loading Problem，PLP）2 个经典的组合优化问题，其求解难度随变量增加呈指数级增长，因此该 NP-Hard 问题难以求解。启发式算法是求解这类问题的有效方法，近些年来，根据优化目标及约束条件的不同，学者们提出了相应的启发式算法。

在集装箱装载方面，尚正阳等[1]针对一刀切约束下的二维装箱问题，构建改进优先度算法求解，运行效果较优。Ignacio 等[2]设计了集装箱装载率及产品价值最大化 2 个目标函数，利用集束搜索算法求解。刘胜等[3-4]考虑完全支撑及方向等约束条件，将树搜索的思想应用于三维装箱。Bayraktar 等[5]考虑几何约束以及不重叠约束，并利用混合人工蜂群算法进行求解。张长勇等[6]考虑产品装载的顺序约束、稳定性约束、不重叠约束等，并利用基于拟人装载策略的改进遗传算法求解。王帅等[7]设计基于强化学习的方法训练所建立的装箱模型解决机场行李箱的装箱问题。吕雪菊等[8]考虑了稳定性约束、定向性以及完全切割约束，利用半径多样化小生境遗传算法进行求解。

在托盘装载方面，PLP 按照所装产品类型相同或不同可分为制造商托盘装载（Manufacturer's Pallet Loading Problem，MPLP）和分销商托盘装载（Distributor's Pallet Loading Problem，DPLP）2 种类型。大多学者采用将同质或异质的产品构成层，接着将产品层层堆码的方法，使托盘数量最小化，此时构成层的过程可转化为二维托盘装载[9-10]。在二维托盘装载方面，Pisinger 等[11]考虑几何约束以及不重叠约束，构建混合整数规划模型，并介绍几个新的下限。Cui 等[12]考虑方向性约束以及完全切割约束，并利用价值修订方程修订生成产品的价值，并利用顺序启发式算法求解。宋卫生等[13]基于 4 种典型的托盘堆码方式，以表面利用率最大为目标研究了货物的装载优化方式，并给出了最优排列方案。

在引入托盘的集装箱装载方面，Liu 等[14]研究家具工厂产品的装载问题，考虑将已装载产品的托盘装载到集装箱后，在剩余空隙中加入未被装载的产品，从而使集装箱利用率最大，利用树搜索算法与贪婪算法实现。Alonso 等[15-16]研究卡车车厢结合托盘的装载问题，该文献假设已确定好每个产品在托盘上的层布局，将产品及托盘整体装入车厢；为保证产品在车厢的稳定性，需满足多个约束条件，利用混合整数规划模型及贪心随机自适应搜索算法求解。

综上所述，目前大多数文献均是单独提高集装箱或托盘的空间利用。虽然有少量文献研究了引入托盘的集装箱装载问题，但该类文献仅考虑将托盘与产品整体装入集装箱或车厢中，未同时考虑产品的托盘打包及装箱问题，以及未考虑装载多种托盘类型。本文将产品的托盘打包及装箱过程进行统筹优化，考虑实际装载过程中的诸多约束，建立以最大化产品装载体积为目标的集装箱-托盘装载模型。为降低问题的复杂度，将所研究的问题分解为 2 个子问题，并建立两阶段装载模型求解。考虑到产品数量较多时模型求解困难的问题，设计两阶段启发式算法求解。本文采用 2 种不同规模大小的算例对所提的模型及算法进行测试，验证模型的正确性和算法的有效性、收敛性及稳定性。

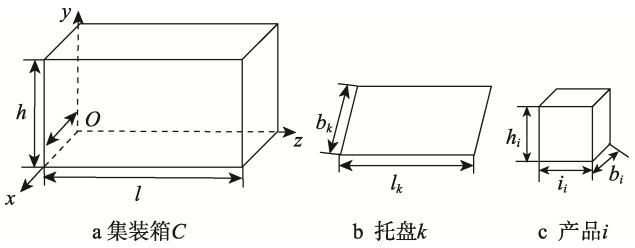
1 问题描述与建模

1.1 问题描述

给定标准集装箱 C、托盘集合 P 以及一批工厂的待装产品集合 $A=\{b_1, b_2, ..., b_n\}$。设 F_1 为 A 的子集，问题的目标是选择一个 A 的子集，将 F_1 中的产品码放在托盘上，再装载到集装箱 C 中，使 F_1 中的产品体积之和最大化。本文以集装箱的左后下点为坐标原点 O、xz 平面为底面、垂直底面向上为 y 轴建立三维坐标系，坐标系和集装箱、托盘以及产品的尺寸示意图如图 1 所示。需满足以下约束条件：对 F_1 中任何

产品在托盘中对应一个填充位置；托盘及产品整体在集装箱 C 中对应一个填充位置；所有 F_1 中的产品全部码放在托盘中；不重叠约束，即 F_1 中任意 2 个产品以及任意 2 个托盘之间不存在镶嵌、包含的情况，示意图如图 2 所示。

本文基于以下假设进行研究：工厂有多种产品类型，且每种产品类型数量充足；产品全部为规则的长方体形状；产品的重量在托盘以及集装箱承重范围之内；不考虑产品之间以及产品与托盘之间存在挤压变形的情况；托盘仅能放置在集装箱底面，以简化装卸流程；每个托盘可装载多个类型的产品；为保证装载稳定性，在产品装载完成之后，允许将托盘固定，并把缝隙填充。

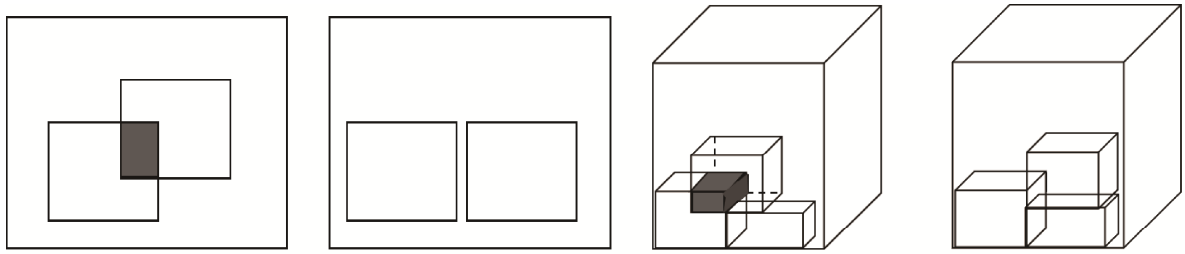


a 集装箱C　　b 托盘k　　c 产品i

图 1　坐标系以及集装箱、托盘和产品的尺寸
Fig.1 Schematic diagram of coordinate system and container, pallet and product dimensions

1.2　符号说明

本文所用的参数和变量说明见表 1。



a 托盘之间重叠　　b 托盘之间不重叠　　c 产品之间重叠　　d 产品之间不重叠

图 2　不重叠约束
Fig.2 Non-overlapping constraint

表 1　参数符号
Tab.1 Parameter symbol

参数	参数含义	参数	参数含义
C	集装箱的集合	S_k	托盘 k 的表面积
P	托盘的集合	S_i	产品 i 的底面积
A	产品的集合	(x_i, y_i, z_i)	产品 i 在坐标系中左后下点的坐标
h	集装箱的高度	(X_k, Y_k, Z_k)	托盘 k 在坐标系中左后下点的坐标
d	托盘底座厚度	m_{ij}	产品 i 在产品 j 的左侧，则为 1；否则，为 0
h_i	产品 i 高度	L_{pq}	托盘 p 在托盘 q 的左侧，则为 1；否则，为 0
b	集装箱的宽度	n_{ij}	产品 i 在产品 j 的后面，则为 1；否则，为 0
b_k	托盘 k 的宽度	B_{qp}	托盘 p 在托盘 q 的后面，则为 1；否则，为 0
b_i	产品 i 的宽度	u_{ij}	产品 i 在产品 j 的上面，则为 1；否则，为 0
l	集装箱的长度	D_{pq}	托盘 p 在托盘 q 的下面，则为 1；否则，为 0
l_k	托盘 k 的长度	R_{pq}	托盘 p 在托盘 q 的右侧，则为 1；否则，为 0
l_i	产品 i 的长度	F_{pq}	托盘 p 在托盘 q 的前面，则为 1；否则，为 0
$l_{\max}$	托盘最大长度	U_{qp}	托盘 p 在托盘 q 的上面，则为 1；否则，为 0
$b_{\max}$	托盘最大宽度	a_{ik}	产品 i 放入托盘 k 中，则为 1；否则，为 0
V_c	集装箱的体积	f_k	托盘 k 在集装箱 C 中，则为 1；否则，为 0
V_i	产品 i 的体积		

1.3 模型构建

1.3.1 集装箱-托盘装载模型

本文参考文献[7]不重叠约束的建模思路，在 x、y、z 轴方向上对产品位置关系进行约束。保证任意 2 个产品及托盘之间不发生重叠，且不能超出集装箱的尺寸范围，建立以装载产品体积之和最大化为目标的集装箱-托盘装载模型。在集装箱装载过程中同时确定产品在托盘上的布局，以及产品和托盘整体在集装箱中的位置，其中装载在集装箱中的产品只能完全放置在一个托盘中。具体模型如下：

$$Maximize(U_1)=\sum_{i\in B}\sum_{k\in P}V_i\times a_{ik}\times f_k \tag{1}$$

$$mij+mji+nij+nji+uij+uji+1-aik+1-ajk\geqslant 1 \quad \forall i, j\in A,\ i<j,\ \forall k\in P \tag{2}$$

$$x_i-x_j+b_{\max}\times m_{ij}\leqslant b_{\max}-w_i \quad \forall i, j\in A \tag{3}$$

$$y_j-y_i+H'\times u_{ij}\leqslant H'-h_j \quad \forall i, j\in A \tag{4}$$

$$z_i-z_j+l_{\max}\times n_{ij}\leqslant l_{\max}-l_i \quad \forall i, j\in A \tag{5}$$

$$x_i\leqslant b_k-b_i+(1-a_{ik})\times b_{\max} \quad \forall i\in A,\ \forall k\in P \tag{6}$$

$$y_i\leqslant H'-h_i+(1-a_{ik})\times H' \quad \forall i\in A,\ \forall k\in P \tag{7}$$

$$z_i\leqslant l_k-l_i+(1-a_{ik})\times l_{\max} \quad \forall i\in A,\ \forall k\in P \tag{8}$$

$$\sum_{k\in P}a_{ik}\leqslant 1 \quad \forall i\in A,\ \forall k\in P \tag{9}$$

$$a_{ik}\leqslant f_k \quad \forall i\in A,\ \forall k\in P \tag{10}$$

$$L_{pq}+R_{pq}+U_{pq}+D_{pq}+B_{pq}+F_{pq}+1-f_p+1-f_q\geqslant 1 \quad \forall p, q\in P,\ p<q \tag{11}$$

$$X_p-X_q+b\times B_{pq}\leqslant b-b_p \quad \forall p, q\in P \tag{12}$$

$$X_q-X_p+b\times F_{qp}\leqslant b-b_q \quad \forall p, q\in P \tag{13}$$

$$Y_q-Y_p+h\times U_{pq}\leqslant 0 \quad \forall p, q\in P \tag{14}$$

$$Y_p-Y_q+h\times D_{qp}\leqslant 0 \quad \forall p, q\in P \tag{15}$$

$$Z_p-Z_q+l\times L_{pq}\leqslant l-l_p \quad \forall p, q\in P \tag{16}$$

$$Z_q-Z_p+l\times R_{qp}\leqslant l-l_q \quad \forall p, q\in P \tag{17}$$

$$0\leqslant X_k\leqslant b-b_k \quad \forall k\in P \tag{18}$$

$$Y_k=0 \quad \forall k\in P \tag{19}$$

$$0\leqslant Z_k\leqslant l-l_k \quad \forall k\in P \tag{20}$$

$$m_{ij},\ n_{ij},\ u_{ij}\in\{0,\ 1\} \quad \forall i, j\in A \tag{21}$$

$$L_{pq},\ R_{pq},\ U_{pq},\ D_{pq},\ B_{pq},\ F_{pq}\in\{0,\ 1\} \quad \forall p, q\in P \tag{22}$$

$$f_k,\ a_{ik}\in\{0,\ 1\} \quad \forall i\in A,\ \forall k\in P \tag{23}$$

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ X_k,\ Y_k,\ Z_k\geqslant 0 \quad \forall i\in A,\ \forall k\in P \tag{24}$$

其中，式（1）为目标函数，表示装入集装箱的产品体积之和最大化；式（2）—式（5）表示当产品装入三维托盘时，产品之间在 x、y、z 轴方向上不发生重叠，其中三维托盘的高度 $H'=H-d$；式（6）—式（8）表示产品不能超出三维托盘的尺寸范围；式（9）表示产品 i 最多只能放进 1 个托盘中；式（10）确保已装进产品的托盘 k 能装入集装箱中；式（11）—式（17）确保三维托盘之间不发生重叠；式（18）—式（20）确保三维托盘不能超出集装箱的尺寸范围；式（21）—式（24）表示决策变量约束。

由上述目标函数和约束条件可知，该模型为混合整数线性规划模型，该模型的复杂度由产品数量 n 及托盘数量 m 共同决定。共有 $3n^2+6m^2+2m$ 个 0～1 的变量和 $3m+3n$ 个连续变量，可利用商业求解器 CPLEX 精确求解小规模算例。随着产品数量以及托盘数量的增加，CPLEX 的求解时间呈指数级增加，难以求解。

1.3.2 两阶段装载模型

由于上述集装箱-托盘装载模型复杂度高、难以求解，因此考虑将所研究的问题拆分为二维集装箱装载和三维托盘装载 2 个子问题，建立两阶段装载模型对 2 个子问题分别建模。具体步骤如下所出。

1）第 1 阶段。确定多种类型托盘在集装箱底面的布局。建立二维集装箱装载模型确定托盘在集装箱底面的布局，即确定装入集装箱底面托盘的种类、数量及位置，如图 3 所示，这些二维托盘整体形成集合 M。该模型以装入集装箱的托盘表面积最大化为目标函数，考虑托盘装载时的不重叠约束条件，在 x、z 轴方向上约束托盘之间的位置关系。具体的装载模型如下：

$$Maximize(U_2)=\sum_{k\in P}S_k\times f_k \tag{25}$$

$$L_{pq}+R_{pq}+B_{pq}+F_{pq}+1-f_p+1-f_q\geqslant 1 \quad \forall p, q\in P,\ p<q \tag{26}$$

$$X_p-X_q+b\times B_{pq}\leqslant b-b_p \quad \forall p, q\in P \tag{27}$$

$$X_q-X_p+b\times F_{qp}\leqslant b-b_q \quad \forall p, q\in P \tag{28}$$

$$Z_p-Z_q+l\times L_{pq}\leqslant l-l_p \quad \forall p, q\in P \tag{29}$$

$$Z_q-Z_p+l\times R_{qp}\leqslant l-l_q \quad \forall p, q\in P \tag{30}$$

$$0\leqslant X_k\leqslant b-b_k \quad \forall k\in P \tag{31}$$

$$0\leqslant Z_k\leqslant l-l_k \quad \forall k\in P \tag{32}$$

$$L_{pq},\ R_{pq},\ B_{pq},\ F_{pq}\in\{0,\ 1\} \quad \forall p, q\in P \tag{33}$$

$$f_k\in\{0,\ 1\} \quad \forall k\in P \tag{34}$$

$$X_k,\ Z_k\geqslant 0 \quad \forall k\in P \tag{35}$$

其中，式（25）为目标函数，表示装入集装箱的托盘表面积之和最大化；式（26）—式（30）确保托盘之间不发生重叠；式（31）—式（32）确保托盘的尺寸小于集装箱的尺寸；式（33）—式（35）表示决策变量约束。

2）第 2 阶段。在第 1 阶段确定托盘在集装箱的底面布局后，这些以托盘为底、高为 H'的长方体整体形成三维托盘集合 J，建立三维托盘装载模型，将产品装载到这些三维托盘中。该模型以装入产品的体积最大化为目标函数，同时满足产品之间的不重叠约束条件，在 x、y、z 轴方向上约束产品之间的位置关系，具体的模型如下：

$$Maximize(U_3)=\sum_{i\in M}\sum_{k\in N}V_i\times a_{ik} \tag{36}$$

$$m_{ij}+m_{ji}+n_{ij}+n_{ji}+u_{ij}+u_{ji}+1-a_{ik}+1-a_{jk}\geqslant 1 \quad \forall i, j\in A,\ i<j,\ \forall k\in J \tag{37}$$

$$x_i-x_j+b_{\max}\times m_{ij}\leqslant b_{\max}-w_i \quad \forall i, j\in A \tag{38}$$

$$y_j - y_i + H' \times u_{ij} \leqslant H' - h_j \quad \forall i, j \in A \tag{39}$$

$$z_i - z_j + l_{\max} \times n_{ij} \leqslant l_{\max} - l_i \quad \forall i, j \in A \tag{40}$$

$$x_i \leqslant b_k - b_i + (1 - a_{ik}) \times b_{\max} \quad \forall i \in A, \forall k \in J \tag{41}$$

$$y_i \leqslant H' - h_i + (1 - a_{ik}) \times H' \quad \forall i \in A, \forall k \in J \tag{42}$$

$$z_i \leqslant l_k - l_i + (1 - a_{ik}) \times l_{\max} \quad \forall i \in A, \forall k \in J \tag{43}$$

$$\sum_{k \in N} a_{ik} \leqslant 1 \quad \forall i \in A, \forall k \in J \tag{44}$$

$$a_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in A, \forall k \in J \tag{45}$$

$$m_{ij}, n_{ij}, u_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in A \tag{46}$$

$$x_i, y_i, z_i \geqslant 0 \quad \forall i \in A \tag{47}$$

其中，式（36）为目标函数，表示装进三维托盘集合的产品的体积之和最大化；式（37）—式（43）表示确保产品之间不发生重叠；式（44）表示产品 i 最多只能放进 1 个托盘中；式（45）—式（47）表示决策变量约束。

1.3.3　两阶段启发式算法

当产品数量 n 较多时，两阶段装载模型的第 2 阶段利用三维托盘装载模型求解较为困难，难以在合理的时间内得到满意解。目前，已有较多文献求解该类组合优化问题[17]。考虑到求解的时效性，本文设计两阶段启发式算法进行求解，在第 2 阶段对三维托盘装载模型进行优化。算法步骤如下所示。

1）第 1 阶段。调用 CPLEX 求解器对二维集装箱装载模型进行求解，可以在短时间内确定多种托盘类型在集装箱底面的布局，因此不需要优化。

2）第 2 阶段。由于工厂内每种类型的产品数量充足，所以基于第 1 阶段求解获得托盘集合 M。首先参考文献[8]建立二维托盘装载模型，并利用 CPLEX 确定产品在托盘表面上的数量及位置，如图 3a 所示；其次确定产品的堆码层数，保证堆码高度不能大于 H'，如图 3b 所示；接着计算装入托盘的每种类型产品顶部剩余空间的尺寸大小，其中底面为该类型产品的底面，高为 $H' - \sum_{i \in B} h_i$；最后将所有的产品类型按照体积大小排序，遍历所有顶部剩余空间，依次判断是否有产品可装入剩余空间中，如图 3c 所示，直到遍历所有顶部剩余空间，空间利用率最大化，则输出最优装载方案。该装载方法满足完全支撑约束，即上层产品的底面必须完全接触下层产品，作为下层产品的支撑，保证了产品装载过程中的垛形稳定。

在确定产品在托盘表面的布局时，将该装载过程建立二维托盘装载模型，即在第 1 阶段选定的托盘表面集合 N 和给定的产品底面集合 M 中，计算装载托盘表面积利用率最大的产品集合。该模型以装载产品的表面积最大化为目标函数，考虑产品之间的不重叠约束条件，在 x、z 轴方向上约束产品之间的位置关系，具体的模型如下所示：

$$Maximize(U_4) = \sum_{i \in M} \sum_{k \in N} S_i \times a_{ik} \tag{48}$$

$$m_{ij} + m_{ji} + n_{ij} + n_{ji} + 1 - a_{ik} + 1 - a_{jk} \geqslant 1 \quad \forall i, j \in M, i<j, \forall k \in N \tag{49}$$

$$x_i - x_j + b_{\max} \times m_{ij} \leqslant b_{\max} - w_i \quad \forall i, j \in M \tag{50}$$

$$z_i - z_j + l_{\max} \times n_{ij} \leqslant l_{\max} - l_i \quad \forall i, j \in M \tag{51}$$

$$x_i \leqslant b_k - b_i + (1 - a_{ik}) \times b_{\max} \quad \forall i \in M, \forall k \in N \tag{52}$$

$$z_i \leqslant l_k - l_i + (1 - a_{ik}) \times l_{\max} \quad \forall i \in M, \forall k \in N \tag{53}$$

$$\sum_{k \in N} a_{ik} \leqslant 1 \quad \forall i \in M, \forall k \in N \tag{54}$$

$$a_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in M, \forall k \in N \tag{55}$$

$$m_{ij}, n_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in M \tag{56}$$

$$x_i, z_i \geqslant 0 \quad \forall i \in M \tag{57}$$

其中，式（48）为目标函数，表示装进若干个托盘的产品底面积最大化；式（49）—式（53）确保产品之间不发生重叠；式（54）表示产品 i 最多只能放进一个托盘中；式（55）—式（57）表示决策变量约束。

2　实验方案

本文选取郑州市某食品加工厂为研究对象，以该工厂的产品托盘打包及装箱问题为例，根据实地调研资料，设置 2 组规模大小的算例数据，以验证模型的正确性及算法的有效性与寻优性。

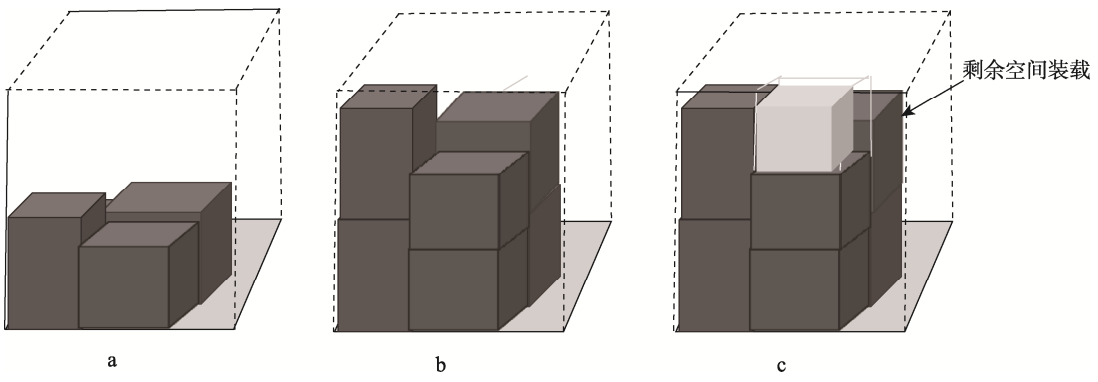


图 3　启发式三维托盘装载示意图

Fig.3 Schematic diagram of heuristic 3D pallet loading

本文利用 Matlab 完成数据的输入输出处理，并利用 IBM ILOG CPLEX12.8 对建立的模型进行求解。实验程序运行在 Intel(R) Core(TM) i7-7500U CPU@2.70 GHz 2.90 GHz 处理器上，运行环境为 Windows 10 企业版。

2.1 实验参数设置

本文设置 2 种规模大小的算例数据，小规模算例有 6 种产品类型，大规模算例有 12 种产品类型，各设置 5 组实验，每组实验由 10 个算例构成。在 2 组算例中，根据实地调研资料，将产品数据利用 Matlab 中的 *rand*（ ）函数在区间范围内随机生成，托盘选自该食品加工厂使用的托盘类型，集装箱尺寸为标准 20 英尺（1 英尺=0.304 8 米）。算例的具体数据来源及范围如表 2 所示。

2.2 小规模算例

在小规模算例实验中，基于 5 组算例，利用 CPLEX 求解器分别求解集装箱-托盘装载模型以及两阶段装载模型，2 个模型独立运行 50 次；依据式（58）计算 2 个装载模型的装载率，并计算差值 G_1。其中，$G_1=(l_1-l_2)/l_1\times100\%$；$l_1$ 为集装箱-托盘装载模型的装载率；l_2 为两阶段装载模型的装载率。集装箱-托盘装载模型、两阶段装载模型计算的装载率及运行时间的对比结果如表 3 所示。由于篇幅有限，仅展示每组算例前 4 个算例的实验结果。

$$l_j=(0.5\times\frac{\sum_{k\in P}S_k\times H\times f_k}{V_c}+0.5\times\frac{\sum_{i\in B}V_i\times a_{ik}}{\sum_{k\in P}S_k\times H\times f_k})\times100\% \tag{58}$$

式中：j=1, 2。

表 2 测试算例参数

Tab.2 Parameters of experimental case

规模类型	托盘		产品			
	尺寸(长×宽)/cm	数量	长/cm	宽/cm	高/cm	种类
小规模算例	150×110	8	70 ~ 100	50 ~ 90	80 ~ 100	6
大规模算例	150×110	6	80 ~ 120	50 ~ 70	37 ~ 55	12
	200×100	6				

表 3 小规模算例数据对比

Tab.3 Comparison of small-scale experimental case data

组号	算例	集装箱-托盘装载模型		两阶段装载模型		G_1/%
		装载率/%	运行时间/s	装载率/%	运行时间/s	
第 1 组	1	45.86	689.83	45.86	35.26	0
	2	49.70	1 148.33	49.70	216.93	0
	3	38.03	272.62	38.03	130.18	0
	4	45.42	1 125.96	45.42	573.81	0
第 2 组	1	40.54	517.30	40.54	77.30	0
	2	43.66	517.30	43.66	107.60	0
	3	43.51	670.80	43.51	210.42	0
	4	41.14	279.62	41.14	28.28	0
第 3 组	1	42.91	0.21	42.91	92.36	0
	2	42.02	157.23	42.02	32.83	0
	3	43.46	126.62	43.46	35.89	0
	4	43.64	453.28	43.64	49.37	0
第 4 组	1	44.10	402.97	44.10	31.19	0
	2	42.35	261.07	42.35	43.18	0
	3	44.75	85.19	44.75	10.13	0
	4	42.82	319.06	42.82	73.15	0
第 5 组	1	42.45	364.35	42.45	77.83	0
	2	40.67	420.53	40.67	59.26	0
	3	42.49	1 672.19	42.49	800.36	0
	4	45.37	76.37	45.37	36.34	0

表 3 列出了集装箱-托盘装载模型、两阶段装载模型对 5 组小规模算例进行计算的结果（装载率和运行时间）。从装载率角度来看，集装箱-托盘装载模型与两阶段装载模型在一定时间内实现了精确求解，获得了最优解，G_1 均为 0，验证了 2 个模型的正确性及有效性。

将 2 个模型对 5 组小规模算例的平均运行时间绘制成折线图，如图 4 所示。由图 4 可知，两阶段装载模型的折线斜率相对变化幅度不大，鲁棒性相对较好，且对 5 组算例的平均运行时间相对较少，总平均运行时间仅为 109.41 s，而集装箱-托盘装载模型的平均运行时间为 473.87 s。可以看出相较于集装箱-托盘装载模型，两阶段装载模型在较短时间内获得了最优解，收敛性好。究其原因，两阶段装载模型在第 1 阶段中确定了托盘装载数量，减少了第 2 阶段解的搜索空间，从而收敛性相对较好，提高了求解速度，减少了运行时间。

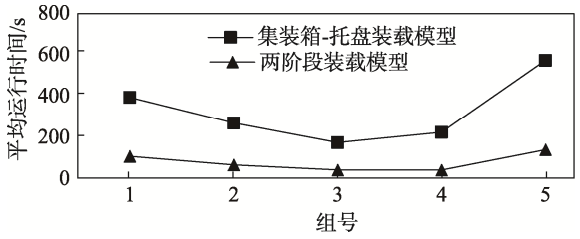


图 4　5 组小规模算例的平均运行时间折线图
Fig.4 Line chart of the average run time for five groups of small-scale experimental case

2.3　大规模算例

在大规模算例中，由于产品数量 n 较大，若利用集装箱-托盘装载模型进行精确求解，求解难度会呈指数级增加，且难以在合理的时间内获得理想的装载方案。两阶段装载模型收敛性相对较好，因此，本文利用 CPLEX 求解两阶段装载模型。考虑将两阶段装载模型的第 2 阶段在 CPLEX 求解器中的运行时间设置为 1 h，计算最大化产品装载体积的下界值，与算法求得的解进行对比，以验证本文所提算法的有效性及寻优性。将两阶段启发式算法与两阶段装载模型求解的结果利用式（58）计算装载率，并计算差值 G_2。其中，$G_2=(l_2-l_3)/l_2\times100\%$；$l_2$ 为两阶段装载模型的装载率；l_3 为两阶段启发式算法的装载率。对比结果如表 4 所示，本文仅展示每组算例前 4 个算例的实验结果。

表 4　大规模算例数据对比
Tab.4 Comparison of large-scale experimental case data

组号	算例	两阶段装载模型		两阶段启发式算法		G_2/%
		装载率/%	运行时间/s	装载率/%	运行时间/s	
第 1 组	1	74.89	3 632.21	73.52	0.23	1.83
	2	73.25	3 607.07	75.42	0.35	−2.96
	3	73.50	3 637.20	73.49	0.74	0.01
	4	72.97	3 601.20	70.98	0.53	2.73
第 2 组	1	72.05	3 601.62	72.32	1.23	−0.37
	2	73.19	3 632.19	72.51	0.25	0.93
	3	71.92	3 601.48	72.62	0.45	−0.97
	4	73.42	3 654.32	67.32	1.25	3.72
第 3 组	1	74.40	3 669.57	72.76	0.35	2.20
	2	77.91	3 619.22	77.93	6.51	−0.03
	3	74.64	3 617.95	72.78	0.66	2.49
	4	71.07	3 600.72	73.54	0.29	−3.48
第 4 组	1	73.29	3 613.43	72.53	0.46	1.04
	2	74.75	3 662.15	73.80	1.47	1.27
	3	74.67	3 662.32	73.94	0.22	0.98
	4	72.84	3 654.90	71.47	1.50	1.88
第 5 组	1	74.19	3 609.90	73.79	0.11	0.54
	2	70.63	3 638.27	73.58	0.14	−4.18
	3	70.14	3 610.03	73.07	0.12	−4.18
	4	73.68	3 671.45	73.61	0.03	0.10

对表 4 中 5 组实验的 G_2 值按照升序排列，如图 5 所示。由图 5 可知，在 5 组实验中，折线图的上下界为[−5%，5%]，斜率增长速度相对较小，说明该算法求解的装载率与下界值相差不大，鲁棒性强。全部实验中，G_2 最大值为 3.72%，最小值为−4.18%，平均值为−0.5%，说明两阶段启发式算法的装载率与下界值相差不大。在保证了产品装载垛形稳定的约束条件下，两阶段启发式算法获得了理想的装载方案。

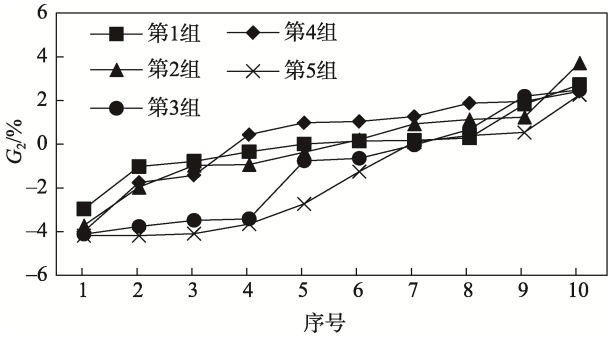


图 5　5 组大规模算例实验的 G_2 值折线图
Fig.5 G_2 value line chart of five groups of large-scale experimental cases

从运行时间来看，两阶段装载模型的平均运行时间为 3 636.02 s，而两阶段启发式算法的平均运行时间仅为 1.82 s，运行时间差距相对较大，在较短的时间内便获得了理想的装载方案。究其原因，该算法在第 2 阶段将三维托盘装载问题转化为二维托盘装载问题，极大地缩小了解的搜索空间，在顶部剩余空间中按照体积大小顺序装入产品，提高了装载率，收敛性好；且在 50 个算例实验中，两阶段启发式算法的运行时间标准差为 2.14，平均标准差仅为 1.17，说明算法的稳定性较好。

从以上分析结果可以看出，在大规模算例实验中，两阶段启发式算法所产生的产品装载方案既保证了产品装载的垛型稳定，又具有高的空间利用率，避免产生浪费；两阶段启发式算法能在较短的时间内得到好的装载方案，鲁棒性强，实用性好，能为工厂产品的托盘打包及装箱提供参考。

3　结语

将工厂产品的托盘打包及装箱问题进行统筹优化，建立了以产品装载体积最大化为目标的集装箱-托盘装载模型，并将该问题分解为二维集装箱装载和三维托盘装载 2 个子问题，针对 2 个子问题建立了两阶段装载模型进行求解。当产品数量过多导致模型难以求解时，建立两阶段启发式算法求解。采用 2 种规模大小的算例对模型和算法进行了测试，验证了模型及算法的有效性。本文的研究能够为工厂产品的托盘打包及装箱问题提供满意的解决方案，从而减少空间浪费，提高经济效益。但本文所提的模型及算法还有一些不足之处，随着产品数量的增加，模型及算法复杂度更高，计算时间更长等；本文只考虑在集装箱底部装载托盘，未考虑托盘承重问题。因此，将来的工作需进一步优化算法，提高计算速度，同时将考虑更多的实际应用场景和约束条件，以提出更好、更适用的解决方案。

参考文献：

[1] 尚正阳, 黄秋妍, 康正阳, 等. 一刀切约束下的二维装箱问题高效求解算法[J]. 包装工程, 2021, 42(7): 231-238.
SHANG Zheng-yang, HUANG Qiu-yan, KANG Zheng-yang, et al. Efficient Heuristic Algorithm for the Two-Dimensional Guillotine Rectangular Bin Packing Problem[J]. Packaging Engineering, 2021, 42(7): 231-238.

[2] ARAYA I, MOYANO M, SANCHEZ C. A Beam Search Algorithm for the Biobjective Container Loading Problem[J]. European Journal of Operational Research, 2020, 286(2): 417-431.

[3] 刘胜, 沈大勇, 商秀芹, 等. 求解三维装箱问题的多层树搜索算法[J]. 自动化学报, 2020, 46(6): 1178-1187.
LIU Sheng, SHEN Da-yong, SHANG Xiu-qin, et al. A Multi-Level Tree Search Algorithm for Three Dimensional Container Loading Problem[J]. Acta Automatica Sinica, 2020, 46(6): 1178-1187.

[4] 刘胜, 朱凤华, 吕宜生, 等. 求解三维装箱问题的启发式正交二叉树搜索算法[J]. 计算机学报, 2015, 38(8): 1530-1543.
LIU Sheng, ZHU Feng-hua, LYU Yi-sheng, et al. A Heuristic Orthogonal Binary Tree Search Algorithm for Three Dimensional Container Loading Problem[J]. Chinese Journal of Computers, 2015, 38(8): 1530-1543.

[5] BAYRAKTAR T, ERSÖZ F, KUBAT C. Effects of Memory and Genetic Operators on Artificial Bee Colony Algorithm for Single Container Loading Problem[J]. Applied Soft Computing Journal, 2021, 108: 107462.

[6] 张长勇, 翟一鸣. 基于改进遗传算法的航空集装箱装载问题研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2021, 47(7): 1345-1352.
ZHANG Chang-yong, ZHAI Yi-ming. Air Container Loading Based on Improved Genetic Algorithm[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2021, 47(7): 1345-1352.

[7] 王帅, 洪振宇. 基于强化学习的机场行李装箱优化方法[J]. 包装工程, 2022, 43(3): 257-263.
WANG Shuai, HONG Zhen-yu. Optimization Method of Baggage Packing in Airport Based on Reinforcement Learning[J]. Packaging Engineering, 2022, 43(3): 257-263.

[8] 吕雪菊, 倪静. 基于自适应空间划分策略的三维装箱问题[J]. 系统工程, 2020, 38(4): 95-102.
LYU Xue-ju, NI Jing. Three Dimensional Container Loading Problem Based on Adaptive Spatial Partition Strategy[J]. Systems Engineering, 2020, 38(4): 95-102.

[9] ALJUHANI D, PAPAGEORGIOU L. Improved Layout Structure with Complexity Measures for the Manufacturer's Pallet Loading Problem (MPLP) Using a Block Approach[J]. Journal of Industrial Engineering and Management, 2021, 14(2): 231-249.

[10] DELL'AMICO M, MAGNANI M. Solving a Real-Life Distributor's Pallet Loading Problem[J]. Mathematical and Computational Applications, 2021, 26(3): 53-63.

[11] PISINGER D, SIGURD M. The Two-Dimensional Bin Packing Problem with Variable Bin Sizes and Costs[J]. Discrete Optimization, 2005, 2(2): 154-167.

[12] CUI Y P, CUI Y D, TANG T B. Sequential Heuristic for the Two-Dimensional Bin-Packing Problem[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 240(1): 43-53.

[13] 宋卫生, 薛阳. 托盘装载优化设计系统的开发[J]. 包装工程, 2021, 42(13): 205-211.
SONG Wei-sheng, XUE Yang. Development of Pallet Loading Optimization Design System[J]. Packaging Engineering, 2021, 42(13): 205-211.

[14] SHENG Liu, ZHAO Hong-xia, DONG Xi-song, et al. A Heuristic Algorithm for Container Loading of Pallets with Infill Boxes[J]. European Journal of Operational Research, 2016, 252(3): 728-736.

[15] ALONSO M T, ALVAREZ-VALDES R, PARREÑO F. A GRASP Algorithm for Multi Container Loading Problems with Practical Constraints[J]. 4OR, 2020, 18(4): 49-72.

[16] ALONSO M T, ALVAREZ-VALDES R, IORI M, et al. Mathematical Models for Multi Container Loading Problems with Practical Constraints[J]. Computers & Industrial Engineering, 2018, 127: 722-733.

[17] SHI Yong, ZHOU Yan-jie, BOUDOUH T, et al. A Lexicographic-Based Two-Stage Algorithm for Vehicle Routing Problem with Simultaneous Pickup-Delivery and Time Window[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2020, 95(2): 103901.

责任编辑：曾钰婵