

缓冲与隔振

双曲正切型包装系统跌落冲击的 MSLP 解

霍银磊^a, 姬喜龙^b, 刘彦亨^a

(河南科技大学 a.包装工程系 b.机电工程学院, 河南 洛阳 471000)

摘要: **目的** 针对双曲正切型非线性有阻尼包装系统在发生跌落冲击时的响应问题, 讨论有效的解析求解方法。**方法** 基于多尺度 L-P 摄动法 (MSLP) 讨论系统跌落冲击响应的近似解, 并与龙哥库塔法 (R-K) 的数值结果进行对比。**结果** 对比结果表明, 在无需额外的幅值及频率修正情况下, 双曲正切型非线性小阻尼系统 ($\zeta < 0.5$) 跌落冲击的最大位移、加速度响应的一次 MSLP 近似解的误差均小于 5%, 且随着阻尼比 ζ 的减小迅速减小。**结论** 所求一次 MSLP 近似解析对于双曲正切型非线性小阻尼包装系统具有较好的计算精度, 为此类问题的求解提供了新的方法参考。

关键词: 正切非线性; 阻尼系统; MSLP 法; 跌落冲击响应

中图分类号: TB485.3; O326 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2021)17-0168-06

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2021.17.022

MSLP Analytical Solution for Dropping Shock of Damped Hyperbolic Tangent Nonlinearity Packaging System

HUO Yin-lei^a, JI Xi-long^b, LIU Yan-heng^a

(a.Department of Packaging Engineering b.School of Mechatronics Engineering, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471000, China)

ABSTRACT: In terms of dropping shock response of damped hyperbolic tangent nonlinearity packaging system, this paper discusses effective method for analytic solution. Based on the multi-scale method and Lindstedt-Poincare perturbation method (MSLP), the approximate solution of dropping shock of damped hyperbolic tangent nonlinear packaging system is discussed. Through comparison with the R-K solutions, the results show that the error of linear MSLP approximate solution for acceleration and maximum displacement of small damping hyperbolic tangent nonlinearity system ($\zeta < 0.5$) dropping shock is less than 5%. and the calculation error decreases rapidly with the decrease of the system damping ratio ζ , without additional correction for the amplitude and frequency. The linear MSLP approximate solution has good calculation precision, especially for small damping hyperbolic tangent nonlinearity system. This research provides a new and effective method reference for the analysis of such problems.

KEY WORDS: tangent nonlinear; damped system; MSLP method; dropping shock response

包装中用到的很多缓冲材料在压缩时表现为明显的双曲正切形弹性特性, 基于此类材料的缓冲包装系统具有较强的非线性特征, 传统的基于小参数 ε 的摄动法对此类问题求解的有效性变差。

为了提高传统摄动法对强非线性系统近似分析

的有效性, 学者们进行了许多的尝试。改进的 Lindstedt-Poincare 摄动法^[1-6]通过替换非线性方程中的常数 ω_0^2 , 而不是频率 ω 为摄动参数 ε 的幂函数, 得到了适用于 ε 较大强非线性系统的高精度解, 并在强非线性 Duffing 方程的求解中得到广泛应用。不少

收稿日期: 2021-01-23

作者简介: 霍银磊 (1979—), 男, 博士, 河南科技大学讲师, 主要研究方向为包装动力学、机械动力学。

学者采用同伦摄动技术^[7]来克服传统摄动理论的不足,进行强非线性方程的求解。多尺度法(Multi-Scale, MS)也是广泛应用于解决含小参数非线性系统的摄动法之一。最近, Pakdemirli^[8-9], Mehmet^[10]和 Karahan^[11]结合文献[1—2]的改进 L-P 思想,对传统 MS 法进行了改进,综合二者的优势得到三次、五次强非线性系统收敛性较好的近似解。由于初始条件和求解目标的差别,上述针对非线性系统振动响应的求解结果并不能直接应用于对跌落冲击问题。

近年来对于非线性包装系统的跌落冲击问题的求解备受关注:通过非线性问题求解中引入跌落冲击过程中的系统能量变化关系,向红^[12]、王军、陈安军等诸多学者及其团队通过对传统 L-P 摄动法、变分迭代理论、简单积分法^[13]、牛顿谐波平衡法(NHB)和何氏频率-振幅(HFAF)关系^[14]、何氏参数展开法等的改进研究了强三次非线性包装系统响应的求解^[15-18],并且证明了所用改进方法的可靠性。目前,针对正切型、双曲正切型非线性系统的研究还比较少,宋浩等^[19]基于何氏 PEM 法分析了无阻尼正切型非线性包装系统跌落冲击响应,利用冲击过程中的能量关系修正了何氏 PEM 法的解析表达,得到较高精度的近似解析解;李皓婧等^[20]也基于何氏 PEM 法分析了无阻尼正切型非线性包装系统跌落冲击响应;王军等^[21-23]分别基于同伦摄动法和 Li-He 氏修正同伦摄动法分析了正切型无阻尼非线性包装系统跌落冲击响应,并对所得解析解基于能量关系进行了修正;Song^[24]利用修正的同伦摄动法分析了双曲正切型无阻尼非线性包装系统的跌落冲击响应,得到了系统响应的级数解;陈安军等^[25]基于牛顿谐波平衡法(NHB)分别分析了双曲正切型缓冲系统跌落冲击响应。

上述冲击响应求解方法大多需要基于冲击过程中的能量变化,对所得解析解的幅值和频率进行修正,以提高冲击响应的计算精度。对于有阻尼的包装系统,能量修正会变得困难,因此,考虑到跌落冲击的瞬时特性,文中将结合多尺度法和改进的 L-P 摄动法来讨论含有线型阻尼的双曲正切型非线性包装系统在发生跌落冲击时的响应问题。

1 系统模型及运动方程

考虑如图 1 所示包装系统的跌落冲击,跌落冲击过程中产品位移以 x 表示,其中缓冲材料的非线性恢复力表示为:

$$F = F_0 \tanh \frac{k_0 x}{F_0} \tag{1}$$

式中: k_0, F_0 分别为材料的初始弹性常数、极限弹力; c 为材料阻尼系数; m 为产品质量; H 为系统跌落高度。

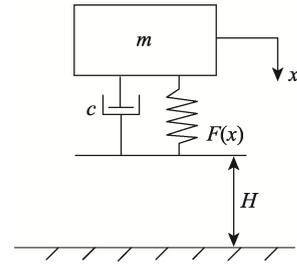


图 1 包装系统跌落动力学模型
Fig.1 Dropping dynamics model of packaging system

由牛顿第二定律可知系统的运动方程:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + F(x) = 0 \tag{2}$$

为方便计算,可将恢复力 $F(x)$ 进行泰勒展开,并取前 3 项得:

$$F(x) = k_0 x - \frac{k_0}{3} \left(\frac{k_0}{F_0} \right)^2 x^3 + \frac{2k_0}{15} \left(\frac{k_0}{F_0} \right)^4 x^5 \tag{3}$$

利用式(3),式(2)可写为:

$$\ddot{x} + \varepsilon^2 \mu \dot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon \alpha x^3 + \varepsilon^2 \beta x^5 = 0 \tag{4}$$

其中:

$$\frac{c}{m} = \varepsilon^2 \mu, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}, \quad \frac{k_0}{3m} \left(\frac{k_0}{F_0} \right)^2 = \varepsilon \alpha,$$

$$\frac{2k_0}{15m} \left(\frac{k_0}{F_0} \right)^4 = \varepsilon^2 \beta \quad \varepsilon \ll 1$$

对于跌落冲击,系统运动的初始条件为:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2gH} \tag{5}$$

2 基于 MSLP 方法的近似解

考虑非线性常数 α, β 可能较大,系统运动的求解可采用改进的 L-P 法^[1],令 $\tau = \omega t$,对式(4)进行时间变换得:

$$\omega^2 x'' + \varepsilon^2 \mu \omega x' + \omega_0^2 x - \varepsilon \alpha x^3 + \varepsilon^2 \beta x^5 = 0 \tag{6}$$

式中: ' 为对新时间变量 τ 的微分。

分别定义快、慢时间尺度:

$$T_0 = \tau \quad T_1 = \varepsilon \tau \quad T_2 = \varepsilon^2 \tau \tag{7}$$

变换后的时间导数和因变量的多尺度展开分别为:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{d\tau^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \\ x &= x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

定义系统基频 ω , 有:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \tag{9}$$

将式(8—9)分别取前 3 项代入式(6),并分离参数 ε 各阶,得:

$$O(1) \quad D_0^2 x_0 + x_0 = 0 \quad (10)$$

$$O(\varepsilon) \quad D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + \frac{\omega_1}{\omega^2} x_0 + \frac{\alpha}{\omega^2} x_0^3 \quad (11)$$

$$O(\varepsilon^2) \quad D_0^2 x_2 + x_2 = -(D_1^2 + 2D_0 D_2) x_0 - 2D_0 D_1 x_1 - \frac{\mu}{\omega} D_0 x_0 + \frac{\omega_1}{\omega^2} x_1 + \frac{\omega_2}{\omega^2} x_0 + \frac{3\alpha}{\omega^2} x_0^2 x_1 - \frac{\beta}{\omega^2} x_0^5 \quad (12)$$

系统运动的初始条件:

$$x_0(0) = 0 \quad x_0'(0) = \frac{\sqrt{2gH}}{\omega} \quad (13)$$

$$x_1(0) = x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 0$$

由式(10)可方便得到系统的0次近似解:

$$x_0 = a \sin(T_0 + \eta) \quad (14)$$

$$\text{其中: } a(0) = a_0 = \frac{\sqrt{2gH}}{\omega}, \quad \eta(0) = 0$$

将式(14)带入式(11)得:

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_1 a \cos(T_0 + \eta) + 2D_1 \eta \sin(T_0 + \eta) + \frac{\omega_1}{\omega^2} a \sin(T_0 + \eta) + \frac{\alpha a^3}{\omega^2} \left[\frac{3}{4} \sin(T_0 + \eta) - \frac{1}{4} \sin(3T_0 + 3\eta) \right] \quad (15)$$

令 $D_1 a = D_1 \eta = 0$, 根据消除久期项条件可得:

$$a = a(T_2), \quad \eta = \eta(T_2), \quad \omega_1 = -\frac{3\alpha a^2}{4} \quad (16)$$

考虑初始条件, 式(11)有如下解:

$$x_1 = \frac{\alpha a^3}{32\omega^2} \sin(3T_0 + 3\eta) + b \sin(T_0 + \gamma) \quad (17)$$

$$\text{其中: } b(0) = -\frac{3\alpha a_0^3}{32\omega^2}, \quad \gamma(0) = 0$$

类似地, 将式(14)和式(17)带入式(12), 根据消除久期项条件^[8], 令 $\omega_2 = 0$, 利用初始条件, 经过计算可得:

$$a = a_0 e^{-\frac{\mu}{2\omega} T_2} \quad b = -\frac{3\alpha a_0^3}{32\omega^2} \quad a_0 = \frac{\sqrt{2gH}}{\omega} \quad (18)$$

$$\eta = \gamma = \left(\frac{21\alpha^2 a_0^4}{512\omega^3 \mu} + \frac{5\beta a_0^4}{32\omega \mu} \right) \left(1 - e^{-\frac{2\mu}{\omega} T_2} \right)$$

整理可得方程(4)的一次渐进解:

$$x = a \sin(\omega t + \theta) - \frac{\varepsilon \alpha a^3}{32\omega^2} [3 \sin(\omega t + \theta) - \sin(3\omega t + 3\theta)] \quad (19)$$

由式(9)和式(16)可得:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \varepsilon \frac{3\alpha a_0^2}{4} e^{-\varepsilon^2 \mu t} \quad (20)$$

利用 $a_0 = \frac{\sqrt{2gH}}{\omega}$, 可解得系统频率为:

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - 6\varepsilon \alpha g H e^{-\varepsilon^2 \mu t}}}{2}} \quad (21)$$

3 算例分析与讨论

为了检验模型的准确性, 考虑系统的MSLP解与龙哥库塔数值解(R-K法)的对比, 借鉴文献[20]中的部分系统参数: $m=10 \text{ kg}$, $g=9.8 \text{ m/s}^2$, $H=0.6 \text{ m}$, 令极限弹力 $F_0=1 \text{ kN}$, 不同初始弹性系数 k_0 和阻尼 c 时系统的跌落冲击响应分别被计算。

当 $c=500 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 时, 具有不同初始弹性系数 k_0 系统的冲击响应解析解与数值解的对比, 以及解析解的相对误差(Relative Error, RE)变化情况见图2—3。可以看出, 随着 k_0 的增大, 系统响应周期逐渐减小, 位移响应幅值逐渐减小, 而加速度幅值逐渐增大, 这与预期一致, 因为较大的 k_0 , 意味着较大的系统刚度和响应频率; 随着 k_0 的增大, 解析解与数值解的吻合度越来越高, 解析解的相对误差逐渐减小, 只有当 k_0 很小时 ($k_0=10 \text{ kN/m}$), 解析计算结果相对于数值解表现出明显的差异, 尤其是对于系统的位移响应幅值和周期而言, 其最大位移响应误差达到10%。注意到此时 ($k_0=10 \text{ kN/m}$) 对应的线型系统的阻尼比 $\zeta = c / (2\sqrt{mk_0})$ 已经很大 (达到了0.79), 远远超出常用缓冲系统的阻尼比范围, 系统几乎不再发生振动。当 $k_0=25 \text{ kN/m}$ 时, 线性系统阻尼比 $\zeta=0.5$, 系统最大位移和加速度的相对误差也仅分别为3.64%和4.96%。对于包装常用系统, 此时阻尼比也已经相对较大^[26]。

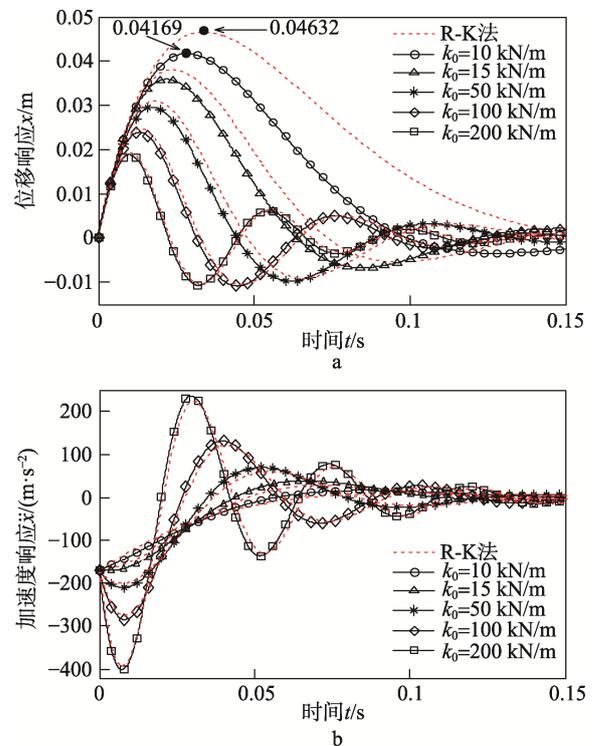


图2 不同初始弹性系数的系统跌落冲击响应 ($c=500 \text{ N}\cdot\text{s/m}$)

Fig.2 Dropping shock responses of the damped packaging system with different initial elastic constant k_0 ($c=500 \text{ N}\cdot\text{s/m}$)

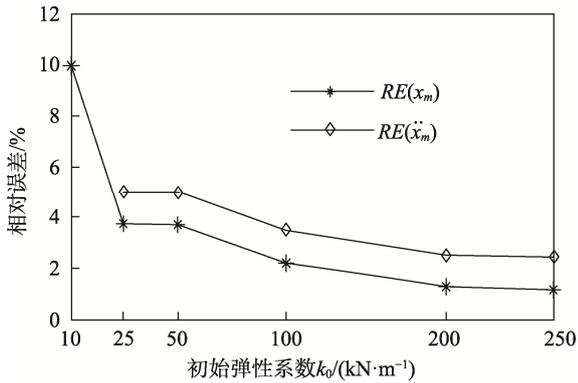


图 3 相对误差随初始弹性系数 k_0 的变化 ($c=500 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$)
Fig.3 Variation of relative error with the initial elastic constant k_0 ($c=500 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$)

考虑不同阻尼时解析解的计算精度，初始弹性系数 $k_0=50 \text{ kN}/\text{m}$ 时，不同阻尼 c 对系统跌落冲击位移响应和加速度响应的解析解与数值解的对比见图 4。结果表明，随着阻尼系数 c 逐渐增大，系统的位移和加速度响应幅值均逐渐减小，响应周期逐渐增大，这也与线性系统的结论一致；对于较大的阻尼，解析解的相对误差也较大。当 $c=1000 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 时，最大位移及最大加速度误差分别为 8.86% 和 0.23% ，此时对应的线性系统阻尼比 $\zeta=0.707$ 也较大。当 $c=500 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 时，线性系统阻尼比 $\zeta=0.354$ ，系统最大位移和加速度的相对误差也仅分别为 3.64% 和 4.99% 。

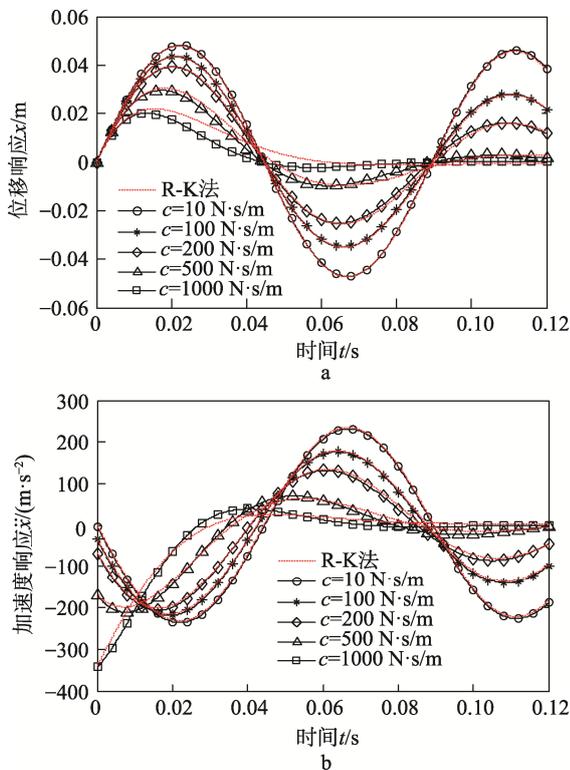


图 4 不同阻尼系统跌落冲击响应 ($k_0=50 \text{ kN}/\text{m}$)
Fig.4 Dropping shock responses of the damped packaging system with different damping c ($k_0=50 \text{ kN}/\text{m}$)

考虑工程设计中应用结构型缓冲材料越来越多，尤其是纸质结构型缓冲件（典型的如：多层瓦楞纸板缓冲结构件、折叠瓦楞纸板缓冲结构、蜂窝纸板）、高发泡率的泡沫塑料以及多孔或网状纤维仿生材料等，在其结构完全坍塌前都具有明显的双曲正切型的力-变形特性（图 5）^[27—28]。对于由此类缓冲材料或结构件与产品组成的包装系统，基于此类材料或结构件的力-变形特性，可以利用该方法快速计算目标包装系统的跌落冲击响应，从而对跌落冲击时缓冲防护的可靠性进行理论评估。

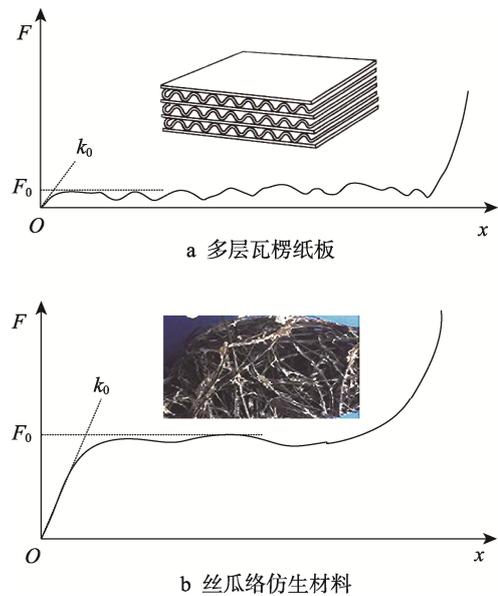


图 5 常用缓冲材料或结构受压时的力-变形量曲线
Fig.5 Force-deformation curves of commonly used cushioning material or structure under compression

4 结语

文中结合多尺度法和改进的 L-P 法分析了含有阻尼的双曲正切型非线性包装系统的跌落冲击响应，并与数值解进行对比。结果表明，MSLP 方法可有效用于含有阻尼的双曲正切型非线性包装系统的跌落冲击响应的近似解析求解，其一次近似解形式简单，计算方便。随着对应线性系统阻尼比的增大，非线性系统 MSLP 一阶近似解的误差逐渐增大。对于实际的小阻尼缓冲材料系统（阻尼比 $\zeta < 0.5$ ），MSLP 一阶近似解具有较高的精度。由于正切型非线性力-变形关系也具有类似的泰勒展开，该方法也可方便应用到正切型非线性系统的求解。

参考文献：

[1] HE Ji-huan. Modified Lindstedt-Poincare Methods for Some Strongly Non-Linear Oscillations Part I: Expansion of a Constant[J]. International Journal of

- Non-Linear Mechanics, 2002, 37: 309—314.
- [2] HE Ji-huan. Modified Lindstedt-Poincare Methods for Some Strongly Non-Linear Oscillations Part II: a New Transformation[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2002, 37: 315—320.
- [3] HU Hui. A Classical Perturbation Technique Which is Valid for Large Parameters[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 269(1/2): 409—412.
- [4] HU Hui, XIONG Zhi-Guang. Comparison of Two Lindstedt-Poincaré Type Perturbation Methods[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 278(1/2): 437—444.
- [5] CAI Jian-ping. Numerical Comparisons of Two Lindstedt-Poincare Type Perturbation Methods for the Duffing Equation[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2009, 10(7): 959—963.
- [6] 李银山, 郝黎明, 树学锋. 强非线性 Duffing 方程的摄动解[J]. 太原理工大学学报, 2000, 31(5): 516—520.
- LI Yin-shan, HAO Li-ming, SHU Xue-feng. Asyptotic Solution of Strongly Nonlinear Duffing Equation[J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2000, 31(5): 516—520.
- [7] 任东旭. 强非线性 Duffing 型系统动力学的同伦方法研究[D]. 金华: 浙江师范大学, 2013: 1—3.
- REN Xu-dong. Dynamic Research of Strongly Nonlinear Duffing Oscillators by the Homotopy Method(HAM)[D]. Jinhua: Zhejiang Normal University, 2013: 1—3.
- [8] KARAHAN M M F, PAKDEMIRLI M. A New Perturbation Algorithm with Better Convergence Properties: Multiple Scales Lindstedt Poincare Method[J]. Mathematical & Computational Applications, 2009, 14(1): 31—44.
- [9] PAKDEMIRLI M, KARAHAN M. A New Perturbation Solution for Systems with Strong Quadratic and Cubic Nonlinearities[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2010, 33(6): 704—712.
- [10] MEHMET P, GOZDE S. Solution of Quadratic Nonlinear Problems with Multiple Scales Lindstedt-Poincare Method[J]. Mathematical & Computational Applications, 2015, 20(2): 137—150.
- [11] KARAHAN M, PAKDEMIRLI M. Free and Forced Vibrations of the Strongly Nonlinear Cubic-Quintic Duffing Oscillators[J]. Zeitschrift Naturforschung Teil A, 2016, 72(1): 59—69.
- [12] 向红, 汤伯森. L-P 摄动法在跌落冲击问题中的应用[J]. 振动与冲击, 2002(1): 39—42.
- XIANG Hong, TANG Bo-sen. Application of L-P Perturbation Method in Dropping Shock Problem[J]. Journal of Vibration and Shock, 2002(1): 39—42.
- [13] REN Z F, HE J H. A simple Approach to Nonlinear Oscillators[J]. Physics Letters A, 2009, 373(41): 3749—3752.
- [14] HE J H. An Improved Amplitude-Frequency Formulation for Nonlinear Oscillators[J]. International Journal of Nonlinear Sciences & Numerical Simulation, 2008, 9(2): 211—212.
- [15] 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击问题变分迭代法[J]. 振动与冲击, 2013, 32(18): 105.
- CHEN An-jun. Variational Iteration Method for Dropping Shock Problem of a Cubic Non-Linear Packaging System[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(18): 105.
- [16] 杜兴丹, 陈安军. 非线性包装系统跌落冲击动力学响应分析的 NHB 方法[J]. 噪声与振动控制, 2018, 38(6): 48—51.
- DU Xing-dan, CHEN An-jun. The NHB Method for Dropping Shock Dynamic Response Analysis in Nonlinear Packaging Systems[J]. Noise and Vibration Control, 2018, 38(6): 48—51.
- [17] 李宏卫. 非线性自治包装系统动态响应研究[D]. 无锡: 江南大学, 2017: 1—4.
- LI Hong-wei. Study on Dynamic Response of Nonlinear Autonomous Packaging System[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2017: 1—4.
- [18] 杜兴丹. 基于牛顿谐波平衡法非线性包装系统跌落冲击动力学性能研究[D]. 无锡: 江南大学, 2019: 15—17.
- DU Xing-dan. Research on Dropping Schock Dynamics Performance of Nonlinear Packaging System Based on Newton-harmonic Balancing Method[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2019: 15—17.
- [19] 宋浩, 李宏卫. 正切型非线性包装系统跌落冲击响应的何氏 PEM 与修正[J]. 包装工程, 2016, 37(1): 11—14.
- SONG Hao, LI Hong-wei. Correction of He's Parameter-Expanding Method for Analyzing Dropping Shock Response of Tangent Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(1): 11—14.
- [20] 李皓婧, 张敏. 双曲正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析[J]. 包装工程, 2016, 37(23): 116—119.
- LI Hao-jing, ZHANG Min. Dropping Shock Response of Hyperbolic Tangent Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(23): 116—119.
- [21] 郭蓓蓓, 王军. 正切型非线性包装系统跌落冲击响应的同伦摄动法与修正[J]. 振动与冲击, 2018, 37(22): 111—114.
- GUO Bei-bei, WANG Jun. Correction of the Homotopy

- Perturbation Method for Analyzing Dropping Shock Response of a Tangent Nonlinear Packaging System[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(22): 111—114.
- [22] 李宏卫, 王军. 双曲正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析的HAM及其修正[C]//第24届全国结构工程学术会议论文集(第1册), 厦门, 2015: 508—513.
- LI Hong-wei, WANG Jun. Correction of Homotopy Analysis Method for Dropping Shock Response of Hyperbolic Tangent Nonlinear Packaging System[C]// *Proceedings of the 24th National Structural Engineering Academic Conference*, Xiamen, 2015: 508—513.
- [23] JI Qiu-ping, WANG Jun, LU Li-xin, et al. Li-He's Modified Homotopy Perturbation Method Coupled with the Energy Method for the Dropping Shock Response of a Tangent Nonlinear Packaging System[J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2020, 40(2): 1—8.
- [24] SONG Hai-yan. A Modification of Homotopy Perturbation Method for a Hyperbolic Tangent Oscillator Arising in Nonlinear Packaging System[J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2019, 38(3/4): 914—917.
- [25] 赵晓兵, 杜兴丹, 陈安军. 双曲正切非线性系统跌落冲击响应分析的一种近似解析法[J]. *包装学报*, 2019(3): 82—87.
- ZHAO Xiao-bing, DU Xing-dan, CHEN An-jun. An Approximate Analytical Method for Dropping Shock Response of Hyperbolic Tangent Nonlinear System[J]. *Packaging Journal*, 2019, 11(3): 82—87.
- [26] 彭国勋. 运输包装[M]. 北京: 印刷工业出版社, 1999: 104—105.
- PENG Guo-xun. *Transport package*[M]. Beijing: *Printing Industry Press*, 1999: 104—105.
- [27] 王冬梅, 柏子游, 龚户祥, 等. 瓦楞夹层结构动态力学性能评估[J]. *振动与冲击*, 2014, 33(3): 94—97.
- WANG Dong-mei, BAI Zi-you, GONG Hu-xiang, et al. Dynamic Property Evaluation for a Corrugated Sandwich Structure[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(3): 94—97.
- [28] 刘林. 丝瓜络结构仿生材料的制备及其缓冲性能研究[D]. 株洲: 湖南工业大学, 2018: 43.
- LIU Lin. *Preparation of luffa Sponge Structural Bionic Materials and Its Cushioning Property Research*[D]. Zhuzhou: *Hunan University of Technology*, 2018: 43.