

2-RPU/UPR 并联机构的自由度与工作空间分析

张俊轅¹, 马春生¹, 李瑞琴¹, 汪辉²

(1.中北大学, 太原 030051; 2.合肥恒力装备有限公司, 合肥 230000)

摘要: **目的** 针对目前快递行业需要对大量物品进行分拣、包装, 需耗费大量的劳动力, 提出一种 2-RPU/UPR 并联机构进行运动学分析, 得到其自由度和工作空间, 考虑是否可以取代人工操作。**方法** 首先利用 SolidWorks 软件对 2-RPU/UPR 并联机构进行三维建模, 然后利用螺旋理论进行分析, 得到其自由度; 接着通过运动链参数 D-H 表示法和欧拉角表示结合求解位置反解; 最后, 借助 Matlab 软件求出其工作空间, 并改变动定平台半径比, 分析工作空间变化情况。**结果** 2-RPU/UPR 并联机构的工作空间范围比较广, 形状规则, 呈对称分布, 动定平台半径比增大, 工作空间也会随之增大。**结论** 2-RPU/UPR 并联机构具有 xy 等 2 个转动方向和 1 个移动方向 z , 通过添加对应的控制程序, 可以代替人工进行分拣、包装工作。

关键词: 并联机构; 自由度; 位置反解; Matlab

中图分类号: TB486; TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2018)23-0138-05

DOI: 10.19554/j.cnki.1001-3563.2018.23.024

Degree of Freedom and Working Space of 2-RPU/UPR Parallel Mechanism

ZHANG Jun-yuan¹, MA Chun-sheng¹, LI Rui-qin¹, WANG Hui²

(1.North University of China, Taiyuan 030051, China; 2.Hengli Eletek Co., Ltd., Hefei 230000, China)

ABSTRACT: The work aims to propose a 2-RPU/UPR parallel mechanism for kinematics analysis to obtain its degree of freedom and working space and consider whether it can replace manual operation, in view of the fact that the express delivery industry needs to sort and pack a large number of items and consume a lot of labor. Firstly, SolidWorks software was used to build the 3D model for the 2-RPU/PUR parallel mechanism, and then the spiral theory was used for the analysis to obtain its degree of freedom. Then, the DH representation of the kinematic chain and the Euler angle were combined to solve the inverse position kinematics. Finally, the Matlab software was used to find the working space, and the radius ratio of the moving and fixed platforms was changed to analyze the change of working space. The 2-RPU/UPR parallel mechanism was characterized by a wide working space, a regular shape and a symmetric distribution. When the radius ratio of the moving and fixed platforms increased, the working space would increase accordingly. The 2-RPU/UPR parallel mechanism has two directions of rotation (x , y) and one movement direction (z). By adding the corresponding control programs, it can replace manual sorting and packaging work.

KEY WORDS: parallel mechanism; degree of freedom; inverse position kinematics; Matlab

并联机构具有刚度大, 结构稳定, 承载能力强, 精度高等优点^[1-4], 运用在快递行业, 可以在分拣和包装方面节省很长时间, 加快配送速度。在一般生产过程中, 只需要一两个方向的自由度就可以完成^[5-8], 因此少自由度并联机构才是设计中主要需求的。文中对一种 2-RPU/UPR 非对称并联机

构进行分析。由于该机构支链非对称, 因此可以适用于一些对机构自由度要求低的特殊场合。此外, 少自由度并联机构具有结构简单、约束较少、运动性能良好等优点, 对于快递行业这类需要进行大量重复运动和平稳运行的行业来说非常适用。

收稿日期: 2018-07-23

作者简介: 张俊轅 (1993—), 男, 中北大学硕士生, 主攻机构与机器人学。

通信作者: 马春生 (1974—), 男, 博士, 中北大学副教授, 主要研究方向为机构理论与机器人技术。

1 机构描述与坐标系建立

首先利用 SolidWorks 软件对 2-RPU/UPR 并联机构进行三维建模，见图 1。2-RPU/UPR 并联机构由动平台、定平台、2 个 RPU 支链和 1 个 UPR 支链（ R 为转动副， P 为移动副， U 为万向铰）组成^[9]。每条支链都包含 1 个 R 副、1 个 P 副、1 个 U 副。在 P 副上添加驱动，可以通过改变各连杆的长度来使动平台发生变化。如图 1 所示，分别在定平台建立固定坐标系 $O-XYZ$ 和动平台上建立动坐标系 $O-xyz$ ^[10]。

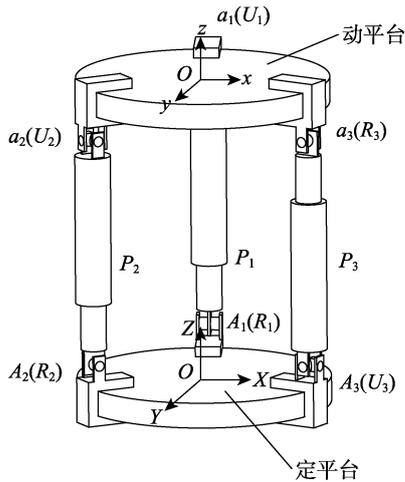


图 1 2-RPU/UPR 并联机构
Fig.1 2-RPU/UPR parallel mechanism

2 自由度分析

利用螺旋理论^[11]对于 2-RPU/UPR 并联机构进行自由度求解，首先对 RPU 支链进行求解，设定坐标系 O_1-xyz ，见图 2。在此坐标系下，RPU 分支可以通过 4 个螺旋表示，见式 (1)。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{i1} = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ g_1) \\ \mathcal{S}_{i2} = (0 \ 0 \ 0; \ e_2 \ 0 \ g_2) \\ \mathcal{S}_{i3} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ f_3 \ 0) \\ \mathcal{S}_{i4} = (0 \ 1 \ 0; \ e_4 \ 0 \ g_4) \end{cases}, i = (1, 2) \quad (1)$$

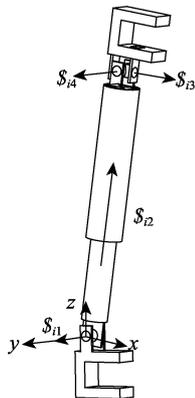


图 2 RPU 支链的约束螺旋
Fig.2 Constrained screw of RPU branch

对式 (1) 求反螺旋，达到式 (2)。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{i1}^r = (0 \ 1 \ 0; \ -e_3 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{i2}^r = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1) \end{cases}, i = (1, 2) \quad (2)$$

同理，对 UPR 支链进行求解，见图 3，得到式 (3) 和式 (4)。

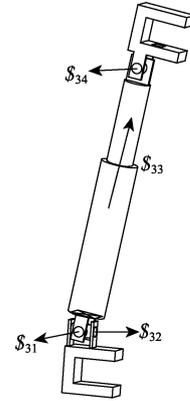


图 3 UPR 支链约束螺旋
Fig.3 Constrained screw of UPR branch

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ G_1) \\ \mathcal{S}_{32} = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{33} = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ F_3 \ G_3) \\ \mathcal{S}_{34} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ F_4 \ G_4) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31}^r = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{32}^r = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1) \end{cases} \quad (4)$$

整合式 (2) 和式 (4)，再求反螺旋。即，整个机构的运动螺旋系式 (5)。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^{rr} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ f_3 \ 0) \\ \mathcal{S}_2^{rr} = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_2^{rr} = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1) \end{cases} \quad (5)$$

通过分析，可以得出以下结论：2-RPU/UPR 并联机构共有 3 个自由度；分别是绕 x 轴和 y 轴的 2 个转动方向，以及沿 z 轴的 1 个移动方向。

3 位置反解

首先对 2-RPU/UPR 并联机构支链写出对应的 D-H^[12]参数见表 1，得到相应的坐标变换矩阵式 (6—9)，通过矩阵乘法运算得到 2-RPU/UPR 并联机构的坐标变换矩阵，见式 (12)，又因为 2-RPU/UPR 并联机构拿欧拉角表示是 $z-y-x$ 型的，因此有式 (13) 与式 (12) 相等，然后利用 Matlab 可以求得支链连杆的参数表达式^[13—15]，见式 (14—17)。

3.1 求解 RPU 支链 1,2 的连杆参数表达式

连杆坐标矩阵：

$$T_{0,1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$T_{1,2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$T_{2,3} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$T_{3,4} = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

表1 RPU支链的D-H参数
Tab.1 D-H parameter of RPU branch

编号	θ_i	$a_{i-1,i}$	$a_{i-1,i}$	S_i
1	θ_1	0	0	0
2	180	90	0	S_2
3	θ_3	90	0	0
4	θ_4	-90	0	0

2-RPU/UPR 并联机构的动平台和定平台的与 3 个支链的连接处构成 2 个等边三角形, 见图 4。设定动平台上的等边三角形外接圆的半径为 r , 定平台上的等边三角形外接圆的半径为 R 。这样得到 O -XYZ

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & X_p \\ \sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & Y_p \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & Z_p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

RPU 支链的位置反解表达式, 见式 (14—15)。

$$S_1 = \frac{16\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{3}R}(d-a^2b-b^3) \quad (14)$$

$$S_2 = \frac{16\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{3}R}(d+a^2b+b^3) \quad (15)$$

式中: $a = Z_p + \cos \theta + \cos \alpha$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}R + \sin \theta \sin \alpha$,

$$d = \sqrt{a^4R^2 + 3a^2b^2R^2 - 2a^4b^2 - a^2b^4 - a^6}。$$

3.2 求解 UPR 支链 3 的连杆参数表达式

同理, 按照 3.1 节的方法求出支链 3 的位置参数表达式, 见式 (16)。

$$S_3 = \frac{16\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{3}R}(d-b^3+a^2b) \quad (16)$$

式中: $a = Z_p - \cos \theta + \cos \alpha$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}R + \sin \theta \sin \alpha$,

到支链的变换矩阵, 见式 (10) 和支链末端到 O -xyz 的变换矩阵, 见式 (11)。

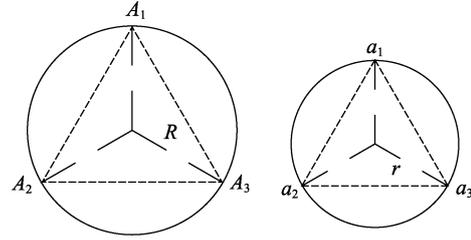


图4 动定平台俯视图
Fig.4 Top view of moving and fixed platforms

$$T_{O,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}R \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}R \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$T_{4,o} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2}r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

固定坐标系 O -XYZ 到运动坐标系 O -xyz 的变换矩阵, 见式 (12)。

$$T_{O,o} = T_{O,0}T_{0,1}T_{1,2}T_{2,3}T_{3,4}T_{4,o} \quad (12)$$

欧拉角矩阵表达式, 见式 (13)。

$$d = \sqrt{a^4R^2 - 3a^2b^2R^2 + 2a^4b^2 - a^2b^4 - a^6}。$$

4 2-RPU/UPR 并联机构工作空间计算

设定 2-RPU/UPR 并联机构的参数: 动定平台外接圆半径 $R=r=500$ mm, 支链初始杆长 $S_1=S_2=S_3=850$ mm, 应用黄真等人编写的《高等空间机构学》一书中提到的空间极限搜索法来求解出所有的空间点集合, 进而得到 2-RPU/UPR 并联机构的工作空间。

4.1 求解 2-RPU/UPR 并联机构工作空间

设定杆长为最短为 800 mm, 最长为 1200 mm, 利用软件 Matlab 编写求解程序, 带入相应数据, 得到图 5, 图 5 由一系列空间点集合而成。

通过观察图 5 可知, 该机构工作空间范围较大, 整体形状以 y - z 平面对称, 而且整体区域紧凑, 无空洞。

4.2 动定平台半径比对工作空间的影响

为了检验动定平台大小对 2-RPU/UPR 并联机构

工作空间的影响，设定 $r=400$ mm， R 保持不变，见图 6。

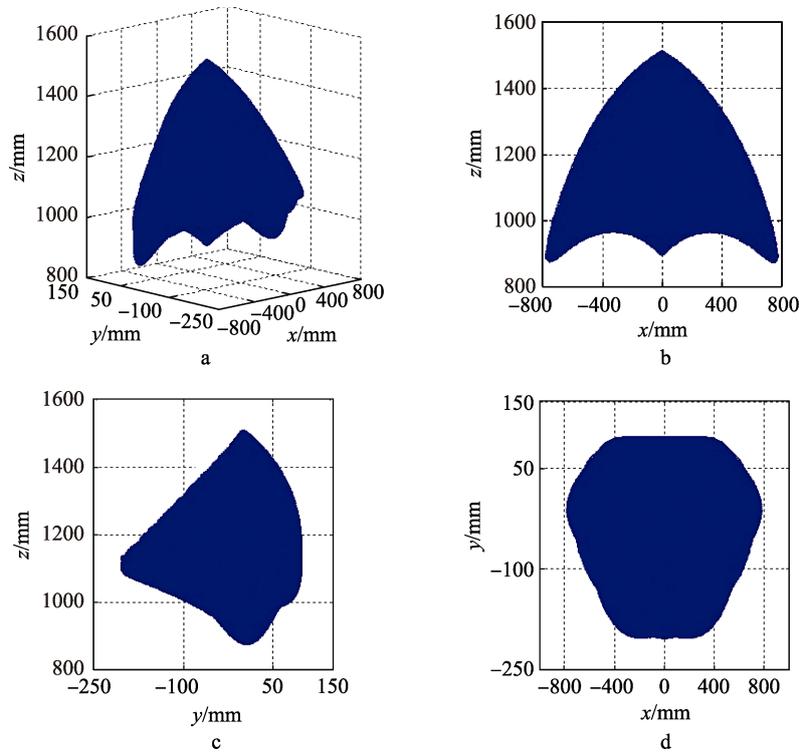


图 5 2-RPU/UPR 并联机构工作空间
Fig.5 Working space of 2-RPU/UPR parallel mechanism

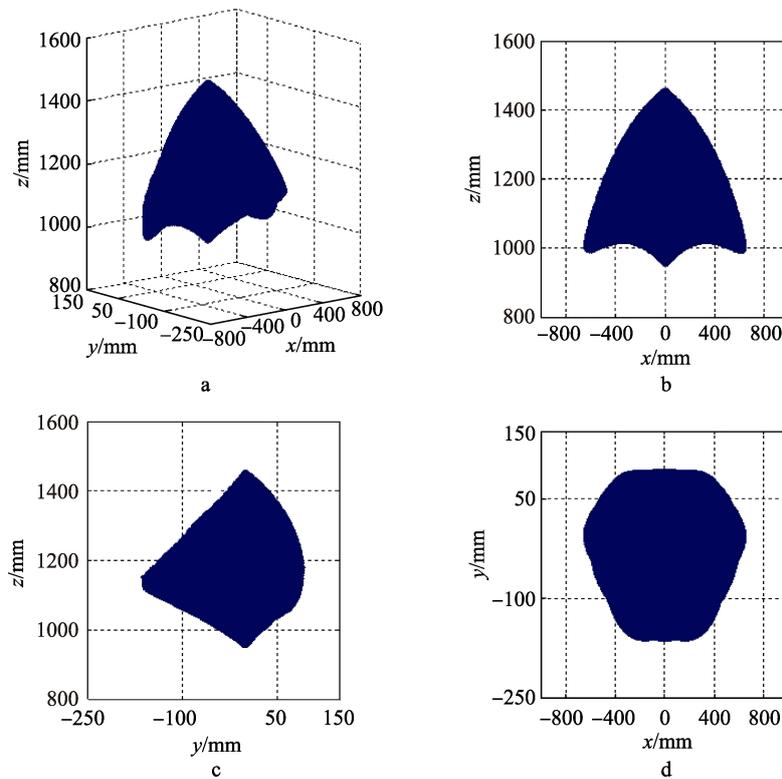


图 6 $r=400$ mm 的 2-RPU/UPR 并联机构工作空间
Fig.6 Working space of 2-RPU/UPR parallel mechanism at $r=400$ mm

将图5和图6对比,可以发现工作空间形状保持不变,只是活动范围减小,证明2-RPU/UPR并联机构工作空间性能良好,而且动定平台尺寸越接近,工作空间越大。

5 结语

文中首先对一种2-RPU/UPR并联机构进行三维建模。然后利用螺旋理论求出该机构自由度为3,接着进行了位置反解分析,最后求出工作空间,此外,还通过改变动平台外接圆半径再次求解工作空间。通过对比2次的结果,发现2-RPU/UPR并联机构工作空间范围比较广,成对称分布,而且改变动平台和定平台的尺寸大小,工作空间也会随之发生改变。但是,只限于空间大小改变,空间形状不受影响,说明该机构空间性能良好。

参考文献:

- [1] LI Q, CHEN Q, WU C. Geometrical Distribution of Rotational Axes of 3-(P)(S) Parallel Mechanisms[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2013, 65(7): 46—57.
- [2] REZAEI A, AKBARZADEH A. Study on Jacobian, Singularity and Kinematics Sensitivity of the FUM 3-PSP Parallel Manipulator[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2015, 86(2): 211—234.
- [3] BHUTANI G, DWAEAKANATH T A. Novel Design Solution to High Precision 3 Axes Translational Parallel Mechanism[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2014, 75(5): 118—130.
- [4] MERLET J P. *Parallel Robots*[M]. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [5] 华为实. Stewart 机器人用作天线支撑的分析[J]. *电子科技大学学报*, 1999(4): 443—446.
HUA Wei-shi. Analysis of Stewart Robot Used as Antenna Support[J]. *Journal of University of Electronic Science and Technology of China*, 1999(4): 443—446.
- [6] 华为实. 基于3-RSR并联机器人机构的天线支撑[J]. *机械*, 2000(5): 10—11.
HUA Wei-shi. Antenna Support Based on 3-RSR Parallel Robot Mechanism[J]. *Machinery*, 2000(5): 10—11.
- [7] 刘小娟, 李虹, 汪辉, 等. 3-RRP平面并联机构的工作空间和灵巧度分析[J]. *东华大学学报(自然科学版)*, 2016, 42(4): 523—526.
LIU Xiao-juan, LI Hong, WANG Hui, et al. Analysis of Workspace and Dexterity of 3-RRP Planar Parallel Mechanism[J]. *Journal of Donghua University (Natural Science)*, 2016, 42(4): 523—526.
- [8] 张斌, 马春生, 汪辉, 等. 2种方法对比分析3-RPS机构的工作空间[J]. *煤矿机械*, 2016, 37(1): 248—250.
ZHANG Bin, MA Chun-sheng, WANG Hui. Comparison of Two Methods for the Workspace of 3-RPS Mechanism[J]. *Coal Mine Machinery*, 2016, 37(1): 248—250.
- [9] 李俊帅, 马春生, 李瑞琴, 等. 3-PUPU并联机构的运动学与工作空间分析[J]. *包装工程*, 2017, 38(11): 123—128.
LI Jun-shuai, MA Chun-sheng, LI Rui-qin. Kinematics and Workspace Analysis of 3-PUPU Parallel Mechanism[J]. *Packaging Engineering*, 2017, 38(11): 123—128.
- [10] 汪辉. 基于并联机构卫星天线支撑架的设计与研究[D]. 太原: 中北大学, 2017.
WANG Hui. Design and Research of Satellite Antenna Support Based on Parallel Mechanism[D]. Taiyuan: North University of China, 2017.
- [11] 黄真, 赵永生, 赵铁石. *高等空间机构学*[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
HUANG Zhen, ZHAO Yong-sheng, ZHAO Tie-shi. *Higher Space Institution*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.
- [12] DENAVIT J, HARTENBERG R S. A kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices[J]. *ASME J Applied Mechanics*, 1955, 22: 215—221.
- [13] 黄真, 李艳文, 高峰. 空间运动构件姿态的欧拉角表示[J]. *燕山大学学报*, 2002, 26(3): 189—192.
HUANG Zhen, LI Yan-wen, GAO Feng. Euler Angle Representation of Space Motion Component Attitude[J]. *Journal of Yanshan University*, 2002, 26(3): 189—192.
- [14] KONG X, JIN Y. Type Synthesis of 3-DOF Multimode Translational/Spherical Parallel Mechanisms with Lockable Joints[J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2015, 96(25): 323—333.
- [15] AKBARZADEH A, ENFERADI J, SHARIFNIA M. Dynamics Analysis of a 3-RRP Spherical Parallel Manipulator Using the Natural Orthogonal Complement[J]. *Multibody System Dynamics*, 2013, 29(4): 361—380.