# 2-UPS/UPR/(rT)PS 可重构并联机构的运动学分析及应用

崔鑫佳,李清\*,宁峰平,李瑞琴,王斌斌,张磊

(中北大学 机械工程学院,太原 030051)

摘要:目的 针对产品加工包装流水线上的印刷和装箱环节,提出一种具有双构型的 2-UPS/UPR/(rT)PS 可重构并联机构。方法 基于螺旋理论,分析得出机构在 2 种构型下自由度的数目及性质;根据修正的 Kutzbach-Grübler 公式,验证自由度的计算结果;采用封闭矢量法计算 2 种模式下机构的运动学反解; 求解机构在 2 种模式下的可达工作空间;分析应用实例,研究机构在进行印刷和装箱 2 个环节作业时驱 动支链线位移的变化,使得机构满足喷码和装箱工作需求。结果 2-UPS/UPR/(rT)PS 并联机构具有 2R1T、 2R2T 等 2 种运动模式,工作空间内部连续。结论 2-UPS/UPR/(rT)PS 可重构并联机构通过运动副轴线变 化,使机构可在 2R1T、2R2T 这 2 种运动模式下进行切换,可应用于产品印刷、装箱环节。 关键词:可重构;螺旋理论;运动学反解;工作空间 中图分类号:TB486;TH112 文献标志码:A 文章编号: 1001-3563(2024)03-0226-08

**DOI:** 10.19554/j.cnki.1001-3563.2024.03.026

# Kinematics Analysis and Application of Reconfigurable 2-UPS/UPR/(rT)PS Parallel Mechanism

CUI Xinjia, LI Qing<sup>\*</sup>, NING Fengping, LI Ruiqin, WANG Binbin, ZHANG Lei

(School of Mechanical Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**ABSTRACT:** The work aims to propose a 2-UPS/UPR/(rT)PS reconfigurable parallel mechanism with dual configuration for the printing and packing links on the product processing and packaging assembly line. Based on the screw theory, the number and properties of degrees of freedom of the mechanism in two configurations were analyzed. The degree of freedom calculation results were verified according to the modified Kutzbach-Grübler formula. The closed vector method was used to calculate the inverse kinematics of the mechanism under the two modes. The reachable workspace of the mechanism in two modes was solved. Through the analysis of application examples, the displacement change of the driving branch line of the mechanism during the two links of printing and packing was studied, and it was concluded that the mechanism could meet the requirements of printing and packing. The 2-UPS/UPR/(rT)PS parallel mechanism had two motion modes of 2R1T and 2R2T, and the workspace was continuous. The 2-UPS/UPR/(rT)PS reconfigurable parallel mechanism can be switched between 2R1T and 2R2T motion modes by changing the axis of the kinematic pair, which can be applied to the printing and packing of products.

KEY WORDS: reconfigurable; screw theory; inverse kinematics; workspace

收稿日期: 2023-07-02

**基金项目:**山西省重点研发计划(202202150401018);山西省研究生教育教学改革课题—中北大学校立培育项目 (2023039JY06)

并联机构是目前的研究热点,传统并联机构的自 由度存在单一性<sup>[1]</sup>,很难适应复杂多变的工况。可重 构并联机构是一类具有多种工作模式的并联机构<sup>[2]</sup>, 根据工作模式的不同,可以应用于产品包装流水线上 的不同环节,例如印刷环节、装箱环节等。印刷环节 机构需要对印刷高度、印刷角度进行调整,装箱环节 机构要有定位、抓取等多重功能。由此可见,可重构 机构在包装工程等领域具有广泛的应用前景。

目前,可重构并联机构研究已成为众多学者的关 注焦点。马春生等<sup>[3]</sup>提出一种 2-SPR/(U+UPR)P(vA) 可重构并联冗余机构,分析了机构的自由度和工作空 间。张春燕等<sup>[4]</sup>对一种全 R 副可重构机器人进行了分 析,设计出该机器人的多种形态。贾维涵<sup>[5]</sup>设计了一 种具有3种运动模式的并联机构。徐帅等[6]提出一种 三自由度可重构机构,分析了机构的工作空间。徐杰 等<sup>[7]</sup>提出一种异形虎克铰机构,对机构的自由度进行 了分析。Essomba 等<sup>[8]</sup>对 3-RRR 球面机构进行了可重 构设计。Huang 等<sup>[9]</sup>设计了一种通过改变结构参数实 现可重构的并联机构。Jia 等<sup>[10]</sup>提出了一种变胞机构, 可以从6个自由度变为5、4、3个自由度。Fang等<sup>[11]</sup> 设计了一种具有闭环支链并联机构,可应用于复合材 料铺带。Ye 等<sup>[12]</sup>提出了一种具有连续可重构能力的 2R1T、1R2T 的可重构并联机构。Chablat 等<sup>[13]</sup>基于 运动副锁合,提出了具有 3T 和多种 2T1R 模式的并 联机构。Li 等<sup>[14]</sup>设计了一种三自由度多工作模式并 联机构。Nurahmi 等<sup>[15]</sup>提出的 3-(rR)PS 可重构并联机 构具有 2 种工作模式。将可重构机构与产品包装融 合,具有良好的应用前景。

针对产品印刷作业,文杰等<sup>[16]</sup>提出了一种具有 2R1T 自由度的 2-RCU/CUR 并联机构。针对快递分 拣装箱作业,樊文龙等<sup>[17]</sup>设计了具有两转两移自由度 的 2-RPU/2-SPU 并联机构。机构印刷需要 2R1T 的自 由度:沿 z 轴的移动,绕 x 轴、y 轴的转动;产品分 拣装箱,机构需要具有沿 x 轴、z 轴移动,以及绕 x 轴、y 轴转动的 4 个自由度。为了同时满足 2 种生产 环节的需求,文中提出一种 2-UPS/UPR/(rT)PS 可重 构并联机构,并分析该机构在 2 种构型下自由度的数 目及性质,依据运动学反解求解机构的工作空间,结 合印刷和装箱实例,研究机构在进行 2 种作业时的工 作状况。

# 1 并联机构 2-UPS/UPR/(rT)PS 构型 描述及坐标系的建立

并联机构 2-UPS/UPR/(rT)PS 由动平台、静平台、 1 条 UPR 支链(支链 1)、2 条 UPS 支链(支链 2 和 支链 3)及 1 条(rT)PS 支链(支链 4)组成,如图 1 所示。支链 4 由 1 个 rT 副、1 个 P 副和 1 个 S 副组 成。可变构型虎克副<sup>[18]</sup>(简称 rT 副)是在普通虎克 副的构型基础上,增加了1个可以调节虎克副姿态的 旋转自由度。如图2a所示,环形件的轴线与支链的 轴线共线,记为(rT)<sub>1</sub>构型。如图2b所示,环形件的 轴线与支链的轴线垂直,记为(rT)<sub>2</sub>构型。



图 1 并联机构整体构型 Fig.1 Overall configuration of parallel mechanism





静平台和动平台的构型为圆形,半径分别为 R、 r。静平台上的 3 个 U 副(点 A<sub>1</sub>、A<sub>2</sub>、A<sub>3</sub>)和 1 个 rT 副(点 A<sub>4</sub>)以正四边形分布。动平台上的 1 个 R 副 (点 B<sub>1</sub>)和 3 个 S 副(点 B<sub>2</sub>、B<sub>3</sub>、B<sub>4</sub>)以正四边形 分布,如图 1 所示。以静平台几何中心为原点,建立 静坐标系 O-xyz,其中, x 轴沿 OA<sub>1</sub>连线方向指向 A<sub>1</sub>, y 轴沿 OA<sub>2</sub>连线方向指向 A<sub>2</sub>, z 轴垂直于静平台向上。 以动平台几何中心为原点,建立动坐标系 O<sub>0</sub>-x<sub>0</sub>y<sub>0</sub>z<sub>0</sub>, x<sub>0</sub>轴沿 O<sub>0</sub>B<sub>1</sub>连线指向 B<sub>1</sub>, y<sub>0</sub>轴沿 O<sub>0</sub>B<sub>2</sub>连线方向指向 B<sub>2</sub>, z<sub>0</sub>轴垂直于动平台向上。

#### 2 自由度分析

根据螺旋理论<sup>[1]</sup>,首先分析支链1(UPR 支链), 建立局部坐标系*O*<sub>1</sub>-*x*<sub>1</sub>*y*<sub>1</sub>*z*<sub>1</sub>,支链1的运动螺旋系见式(1)。

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbf{s}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{s}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0; & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{s}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0; & a & 0 & b \end{pmatrix} \\
\mathbf{s}_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0; & -l_1b & 0 & l_1a \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1}$$

式中:  $S_{11}$ ~ $S_{14}$  为支链 1 的运动螺旋; (a, 0, b)为支链中 P 副的方向余弦;  $l_1$  为支链 1 杆长 (U 副中 心到 R 副中心的距离),下同;  $(0, l_1a, l_1b)$ 为  $B_4$ 点 的坐标。对式 (1) 求反螺旋,得到支链 1 的约束螺 旋,见式 (2)。

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{11}^{r} = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathbf{S}_{12}^{r} = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1) \end{cases}$$
(2)

UPR 支链提供 1 个过 U 副转动中心、沿  $y_1$  方向 的约束力,以及沿  $z_1$  方向的约束力偶。支链 2 和支链 3 为 UPS 支链,为六自由度支链,对机构整体不产生 约束<sup>[1]</sup>。支链 4 为(rT)PS 支链。由于 rT 副具有特殊 性,因此该支链应分为 2 种情况,如图 3 所示。



图 3 支链 4 的 2 种构型 Fig.3 Two configurations of branched chain 4

当 rT 铰变为(rT)<sub>1</sub>PS 构型时,如图 3a 所示,螺 旋 <sup>1</sup>**\$**<sub>42</sub>的轴线与支链 4 的 P 副共线,且过球副中心, 此时可得支链 4 螺旋系,见式(3)。

$$\begin{cases} {}^{1}\mathbf{S}_{41} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ {}^{1}\mathbf{S}_{42} = (0 \ c \ d; \ 0 \ 0 \ 0) \\ {}^{1}\mathbf{S}_{43} = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ c \ d) \\ {}^{1}\mathbf{S}_{44} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ l_{4}d \ -l_{4}c) \\ {}^{1}\mathbf{S}_{45} = (0 \ c \ d; \ 0 \ 0 \ 0) \\ {}^{1}\mathbf{S}_{46} = (0 \ -d \ c; \ l_{4} \ 0 \ 0) \end{cases}$$
(3)

式中:  ${}^{1}S_{41} {}^{-1}S_{46}$ 为构型 1 时支链 4 的运动螺旋; c、d 为螺旋  ${}^{1}S_{42}$ 转轴轴线坐标分量; (0, c, d)为支 链中 P 副的方向余弦;  $l_4$ 为支链 4 杆长 (rT 副中心到 球副中心的距离),下同; (0,  $l_{4c}$ ,  $l_{4d}$ )为  $B_4$  点的坐 标。螺旋  ${}^{1}S_{42}$ 与螺旋  ${}^{1}S_{45}$ 线性相关,对式 (3)求反 螺旋,得到此种构型下支链 4 的约束螺旋,见式(4)。

$$\mathbf{S}_{41}^{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0; & 0 & l_4 d & -l_4 c \end{pmatrix}$$
(4)

此时,支链 4 提供 1 个沿  $x_4$ 方向且通过支链中 球副中心点的约束力。当 rT 副变为(rT)<sub>2</sub>PS 构型时, 如图 3b 所示,即螺旋  ${}^2S_{42}$ 的轴线与支链 4 的 P 副的 轴线垂直,此时支链 4 的运动螺旋系见式(5)。

$$\begin{cases} {}^{2}\mathbf{S}_{41} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ {}^{2}\mathbf{S}_{42} = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ {}^{2}\mathbf{S}_{43} = (0 \ 0 \ 0; \ e \ 0 \ f) \\ {}^{2}\mathbf{S}_{44} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ l_{4}f \ 0) \\ {}^{2}\mathbf{S}_{45} = (0 \ 1 \ 0; \ -l_{4}f \ 0 \ l_{4}e) \\ {}^{2}\mathbf{S}_{46} = (0 \ 0 \ 1; \ 0 \ -l_{4}e \ 0) \end{cases}$$
(5)

式中:  ${}^{2}S_{41} \sim {}^{2}S_{46}$ 为构型 2 时支链 4 的运动螺旋; (0, e, f)为支链中 P 副的方向余弦; (0,  $l_{4e}$ ,  $l_{4f}$ )为  $B_{4}$ 点的坐标。6 个螺旋线性无关,此时支链对机构不 提供约束。机构所受约束如图 4 所示。



图 4 机构约束示意图 Fig.4 Schematic diagram of mechanism constraint

当支链 4 为(rT)<sub>1</sub>PS 构型时,由式(2)、(4)可 知,支链为动平台提供了 3 个约束,分别为沿 y 轴的 约束力、z 轴的约束力偶和沿 x 轴的约束力,这 3 个 约束线性无关,约束力偶限制转动,约束力限制移动。 机构还剩下 3 个自由度,分别为绕 x 轴的转动、绕 y 轴的转动及沿 z 轴的移动。

当支链 4 为(rT)<sub>2</sub>PS 构型时,机构中只有 UPR 支 链对机构提供 2 个约束,分别为沿 y 轴的约束力、沿 z 轴的约束力偶,这 2 个约束线性无关。机构还剩下 4 个自由度,分别为绕 x 轴的转动、绕 y 轴的转动、 沿 x 轴的移动、沿 z 轴的移动。

用修正的 Kutzbach-Grübler 公式,对机构在 2 种不同构型时的自由度进行验证,验证见式(6)。

$$M = D(n - g - 1) + \sum_{i=1}^{g} f_i + v - \zeta$$
(6)

式中,机构不存在公共约束,机构的阶 D=6,构 件数 n=10,机构中总运动副的数目 g=12,机构中运 动副自由度数目之和为 22,冗余约束 v=0。

在支链 4 为(rT)<sub>1</sub>PS 构型时, rT 副中螺旋 <sup>1</sup> $S_{42}$ 的 转动轴线同 S 副的一个螺旋 <sup>1</sup> $S_{44}$ 的转动轴线重合, 产生了一个局部自由度,  $\zeta$ =1, 计算可得 *M*=3。在支 链 4 构型为(rT)<sub>2</sub>PS 时, 无局部自由度, 即  $\zeta$ =0, 计 算可得 *M*=4。验证结果与螺旋理论计算自由度的结 果相符。

在(rT)<sub>1</sub>PS 构型时,当机构沿 z 轴移动时,机构 的运动螺旋系不会发生变化,故约束螺旋不会发生 改变,机构的自由度数目及性质也不会发生变化; 当机构绕 x 轴、y 轴转动时,机构的运动螺旋系不会 发生变化,约束螺旋不会发生变化,3个反螺旋线性 无关,因此机构的自由度具有全周性。在(rT)<sub>2</sub>PS 构 型时,机构中只有支链 1 提供约束,当机构沿 x 轴、 z 轴移动时,机构的运动螺旋系不会发生变化,2个 约束螺旋线性无关;当机构绕 x 轴、y 轴转动时,机 构的运动螺旋系不会发生变化,约束螺旋不会发生改 变,2个约束螺旋线性无关,机构的自由度数目及性 质不变。由此可见,在2种构型下机构的自由度具有 全周性。

### 3 并联机构的位置反解

机构的反解是根据机构的末端位姿参数,反求机构驱动参数的过程<sup>[5]</sup>。在静平台上,将铰链点相对于静坐标系 *O-xyz* 的坐标记为  ${}^{O}A_{i}$ 。在动平台上,将铰链点相对于动坐标系  $O_{0}$ - $x_{0}y_{0}z_{0}$ 的坐标记为  ${}^{O}B_{i}$ 。采用  $l_{i}$ 表示杆  $A_{i}B_{i}$ (即每条支链)位置矢量,采用  $l_{i}$ 表示 杆  $A_{i}B_{i}$ 的长度,其中 i=1,2,3,4。 $O_{0}$ 点相对于 O点的位置矢量为  $OO_{0}=[x, y, z]^{T}$ ,由刚体转动关系,设动平台位姿角为( $y, \beta, a$ )。已知静平台和动平台的半径分别为 R、r。静平台上各点相对于静坐标系 O-xyz的坐标见式(7),动平台上各点相对于动坐标系  $O_{0}$ - $x_{0}y_{0}z_{0}$ 的位置坐标见式(8)。

$${}^{o}A_{1} = [R, 0, 0]^{\mathrm{T}}, {}^{o}A_{2} = [0, R, 0]^{\mathrm{T}},$$
  
$${}^{o}A_{3} = [-R, 0, 0]^{\mathrm{T}}, {}^{o}A_{4} = [0, -R, 0]^{\mathrm{T}}$$
(7)

$${}^{O_0}\boldsymbol{B}_1 = [r, 0, 0]^{\mathrm{T}}, {}^{O_0}\boldsymbol{B}_2 = [0, r, 0]^{\mathrm{T}}, \\ {}^{O_0}\boldsymbol{B}_3 = [-r, 0, 0]^{\mathrm{T}}, {}^{O_0}\boldsymbol{B}_4 = [0, -r, 0]^{\mathrm{T}}$$
(8)

将动坐标系  $O_0$ - $x_0y_0z_0$  中的  ${}^{O_0}B_i$  点转换到静坐标 系 O-xyz 中,转换后各点坐标记为  ${}^{O}D_i$  (i=1, 2, 3, 4),转换见式 (9)。

$$^{O}\boldsymbol{D}_{i}=\boldsymbol{T}^{O_{0}}\boldsymbol{B}_{i}+\boldsymbol{O}\boldsymbol{O}_{1}$$

$$\tag{9}$$

在 2 种构型下, 动平台均无绕 z 轴的转动, 故 y=0°。转换矩阵 T 的计算见式(10)。

$$T = \begin{bmatrix} c\beta & s\alpha s\beta & c\alpha s\beta \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$
(10)

式中: s、c分别表示 sin、cos,下同。计算得到 式(11)。

$${}^{o}\boldsymbol{D}_{1} = [rc\beta + x, y, -rs\beta + z]^{\mathrm{T}}$$
$${}^{o}\boldsymbol{D}_{2} = [rs\alpha s\beta + x, rc\alpha + y, rs\alpha c\beta + z]^{\mathrm{T}}$$
$${}^{o}\boldsymbol{D}_{3} = [-rc\beta + x, y, rs\beta + z]^{\mathrm{T}}$$
(11)

$${}^{\mathcal{O}}\boldsymbol{D}_4 = \left[-rs\,\alpha s\beta + x, -rc\,\alpha + y, -rs\,\alpha c\beta + z\right]^{\mathrm{T}}$$

根据闭环矢量法,可求出各支链的位置矢量表达 式,见式(12)。

$$\boldsymbol{l}_{i} = \boldsymbol{A}_{i} \boldsymbol{D}_{i} = {}^{o} \boldsymbol{D}_{i} - {}^{o} \boldsymbol{A}_{i} \qquad i = 1, 2, 3, 4$$
(12)  
得出式 (13)。

$$t_i = |t_i|$$
  $t = 1, 2, 3, 4$  (14)  
在构型1时,机构的自由度为沿 z 轴的移动,以

及绕 x 轴和 y 轴的转动, 故反解表达见式(15)。

$$\begin{aligned}
l_{1} &= \sqrt{\left(rc\beta - R\right)^{2} + \left(-rs\beta + z\right)^{2}} \\
l_{2} &= \sqrt{\left(rs\alpha s\beta\right)^{2} + \left(rc\alpha - R\right)^{2} + \left(rs\alpha c\beta + z\right)^{2}} \\
l_{3} &= \sqrt{\left(-rc\beta + R\right)^{2} + \left(rs\beta + z\right)^{2}} \\
l_{4} &= \sqrt{\left(-rs\alpha s\beta\right)^{2} + \left(-rc\alpha + R\right)^{2} + \left(-rs\alpha c\beta + z\right)^{2}}
\end{aligned}$$
(15)

当支链 4 为(rT)<sub>2</sub>PS 构型时,机构共有 4 个自由 度,沿 x 轴、z 轴的移动,以及绕 y 轴、y 轴的转动, 反解表达见式(16)。

$$\begin{cases} l_1 = \sqrt{\left(rc\beta + x - R\right)^2 + \left(-rs\beta + z\right)^2} \\ l_2 = \sqrt{\left(rs\alpha s\beta + x\right)^2 + \left(rc\alpha - R\right)^2 + \left(rs\alpha c\beta + z\right)^2} \\ l_3 = \sqrt{\left(-rc\beta + x + R\right)^2 + \left(rs\beta + z\right)^2} \\ l_4 = \sqrt{\left(-rs\alpha s\beta + x\right)^2 + \left(-rc\alpha + R\right)^2 + \left(-rs\alpha c\beta + z\right)^2} \end{cases}$$
(16)

在(**r**T)<sub>1</sub>PS 构型时,根据式(15),机构可给定 3 个参数 z、 $\alpha$ 、 $\beta$ ,求出驱动副反解。在(**r**T)<sub>2</sub>PS 构型时, 根据式(16),机构可给定 4 个参数 x、z、 $\alpha$ 、 $\beta$ ,求 出驱动副反解。

## 4 工作空间

机构能否达到预期的工作范围,可以通过分析机构 的末端执行器的可达工作空间来验证<sup>[19]</sup>。设*R*=120 mm, *r*=80 mm,每条支链的伸缩范围为 200~600 mm。将末 端执行器中心点在动坐标系  $O_0$ - $x_0y_0z_0$  的位置表示为  $O_0Q_1=[0, 0, H_1]^T$ ,在(rT)<sub>1</sub>PS 构型下,通过旋转矩阵将 其转换到静坐标系 O-xyz中,转换后的位置见式(17)。

$${}^{O}\boldsymbol{Q}_{1} = \boldsymbol{T}^{O_{0}}\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{O}\boldsymbol{O}_{1} = \begin{bmatrix} H_{1}s\boldsymbol{\beta}c\boldsymbol{\alpha} \\ -H_{1}s\boldsymbol{\alpha} \\ H_{1}c\boldsymbol{\beta}c\boldsymbol{\alpha} + z \end{bmatrix}$$
(17)

设定  $H_1$ =100 mm, 给定机构反解所需的参数, 将反解表达式(15)导入 Matlab 中,可得到(rT)<sub>1</sub>PS 构型下机构末端执行器的可达工作空间范围,如图 5 所示。

由程序求解可知,末端执行器 z 方向的运动范围 为 243~497 mm, x 轴、y 轴的运动范围均为-86.602 5~ 86.602 5 mm。



图 5 工作空间(构型1) Fig.5 Workspace (configuration 1)

机构在 $(rT)_2$ PS 状态下,同样将末端执行器中心 点  $o_0 Q_1$ 转换到静坐标系中,转换后的位置见式(18)。

$${}^{O}\boldsymbol{Q}_{2} = \boldsymbol{T}^{O_{0}}\boldsymbol{Q}_{1} + \boldsymbol{O}\boldsymbol{O}_{1} = \begin{bmatrix} H_{1}s\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{c}\boldsymbol{\alpha} + x \\ -H_{1}s\boldsymbol{\alpha} \\ H_{1}\boldsymbol{c}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{c}\boldsymbol{\alpha} + z \end{bmatrix}$$
(18)

由于 rT 较具有特殊性,因此需对支链 4 中 U 形件的偏转角进行限制。U 形件的偏转角可通过机构的几何特性表示出来, D<sub>4</sub> 位于空间第 3 象限时求解示意图如图 6 所示。



Fig.6 Deflection angle solution diagram of U-shaped part

在图 6 中, α<sub>1</sub> 表示 U 形件的偏转角,环形件轴 线与 U 形件轴线相互垂直,环形件偏转角为 90°-α<sub>1</sub>, 见式(19)。

$$\alpha_{1} = 90^{\circ} - \arctan\left[\frac{z - rs\alpha c\beta}{\sqrt{\left(R - rc\alpha\right)^{2} + \left(x - rs\alpha s\beta\right)^{2}}}\right] (19)$$

当 *D*<sub>4</sub>运动到其他区域时,式(19)不变。设定 U 形件偏转角 α<sub>1</sub>转动范围为 0°~60°,将反解表达式 (16)导入 Matlab 中,可得到机构的可达工作空间 范围,如图 7 所示。

求解可知,末端执行器在 x 方向的运动范围为 486.391 6~486.391 6 mm,在 y 方向的运动范围为 86.602 5~86.602 5 mm,在 z 方向的运动范围为 175.710 8~599.513 4 mm。



图 7 工作空间(构型 2) Fig.7 Workspace (configuration 2)

在尺寸不变的情况下,机构通过 rT 运动副改变 运动模式。比较 2 种运动模式可知, 2R2T 比 2R1T 多 1 个移动自由度,灵活性较强,工作空间也较大。 对比图 6 和图 7 可知,在 2 种模式下,机构在 y 方向 的运动范围相同,但在 2R2T 运动模式下,机构在 x 和 z 方向的运动范围更大。即,工作空间大的对应 2R2T 运动模式。

### 5 应用实例

目前,很多产品的印刷和装箱工作需要人工完成,如图 8 所示。在印刷环节,刷头需要有沿 z 轴的移动自由度来定位印刷高度,由绕 x 轴和 y 轴的转动来调整印刷角度。当 2-UPS/UPR/(rT)PS 可重构并联机构为(rT)<sub>1</sub>PS 构型时,机构的自由度满足印刷工作所需的 2T1R 自由度,可以满足印刷需求。在装箱环节,抓手应具有沿 z 轴的移动来调整抓取距离,由沿 x 轴的移动将工件送至装箱点,由绕 x 轴和 y 轴的转动确保机械手能对工件的姿态进行调整,如图 8b 所示。当 2-UPS/UPR/(rT)PS 可重构并联机构为(rT)<sub>2</sub>PS 构型时,机构的自由度可以满足装箱所需的 2T2R 自由度,满足装箱需求。



图 8 2 种作业实际工况

Fig.8 Two kinds of actual working conditions

以牛奶盒印刷为例,牛奶盒的尺寸为90 mm×60 mm× 120 mm,刷头距离传送带(牛奶盒底部)240 mm。在第 1 种构型时,根据工作空间范围求解可知,刷头在 z 方向 的运动范围为243~497 mm,在 x 轴、y 轴的运动范围均 为-86.602 5~86.602 5 mm,刷头的工作空间包含牛奶盒印 刷的作业空间。

对目标牛奶盒印刷进行模拟仿真,此时机构有3 个自由度,需要3个驱动。经分析,在4条支链中任 选3个P副作为驱动副,经锁死机构的自由度均为零, 即选取4条支链中的P副作为驱动副,存在1个冗余 驱动。在此次仿真中,将支链1、支链2和支链3中 的P副作为驱动副,将支链4中的P副作为冗余驱动。 通过增加冗余驱动,可以优化机构的驱动力分配,降低机构运动时支链的负载,提升机构的性能。如图 9a 所示,机构进行印刷作业时,设刷头距离喷码处的垂直高度为 200 mm。在 0~1 s时,刷头下移至印刷位置,同时调整印刷姿态。在 1~2 s时,印刷第 1 个工件。在 2~3 s时,刷头竖直回移 50 mm (防止影响下一个工件进入印刷区)。在 3~4 s时,刷头下移至印刷位置。在 4~5 s时,对第 2 个工件进行印刷。在 5~6 s时,印刷完成,刷头返回初始位置。在工作过程中,各驱动支链线位移的变化如图 9b 所示。

以规格为 300 g 的芒果糖盒装箱为例, 糖盒尺寸为 150 mm×80 mm×100 mm, 抓手与糖盒的垂直距离约为 300 mm, 糖盒距离目标放置点的横向距离为 400 mm。 根据工作空间范围可知, 机构在第 2 种构型时, 抓手 在 *x* 方向的运动范围为 486.391 6~486.391 6 mm, 在 *y* 方向的运动范围为 86.602 5~86.602 5 mm, 在 *z* 方向的 运动范围为 175.710 8~599.513 4 mm, 工作空间包含 糖盒装箱的作业空间。

对糖盒装箱进行模拟仿真, 机构此时有 4 个自由 度, 选取 4 条支链中的 P 副作为驱动副, 设定 U 形 件的偏转角 α<sub>1</sub>=30°, 机构进行装箱作业, 如图 10a 所 示。在 0~1 s 时, 抓手下移 300 mm, 同时调整抓取



Fig.10 Packing link

姿态。在 1~2 s 时, 抓取工件。在 2~3 s 时, 抓手在竖 直方向上移 200 mm (设置箱体高度为 100 mm, 防止 触碰箱体)。在 3~4 s 时, 横向平移 400 mm, 到达箱体 落点上方 200 mm 处。在 4~5 s 时, 抓手下移 200 mm, 将工件装箱。在 5~6 s 时, 抓手在竖直方向上移 200 mm (防止触碰箱体)。在 6~7 s 时, 抓手返回到初始位置下 方 200 mm 处, 等待下一个工件进入工作区。装箱周期各 驱动支链线位移的变化如图 10b 所示。

以印刷环节为例,人工印刷单个产品的平均时间 为8s左右。采用传统机械印刷的速度快,但受到单 一自由度的限制,只能用于包装线上某一环节。由图 9b可知,将该机构应用于产品印刷,单个产品印刷 的完成时间为5~6s,效率高于人工印刷。相较于传 统并联机构,2-UPS/UPR/(rT)PS并联机构通过重构可 以应用到装箱环节,从而实现一机多用。

#### 6 结论

提出了 2-UPS/UPR/(rT)PS 可重构并联机构,对 机构进行了运动学分析和工作空间分析,得出以下 结论。

1)通过重构 rT 运动副,实现了 2-UPS/UPR/ (rT)PS 可重构并联机构在 2R1T、2R2T 两种自由度模 式间的切换。

2) 计算了机构在 2 种构型下的位置逆解方程, 绘制了 2 种构型下的工作空间,并分析了在构型 2 时 U 形件偏转角与机构几何尺寸的关系。

3)结合应用实例对机构进行仿真分析,绘制机 构在进行印刷和装箱环节时各个支链的线位移的变 化情况,分析机构应用于产品包装线上的优点,验证 了机构的合理性。

在包装流水线作业方面,目前有许多环节仍以人 工为主,将并联机构与产品包装相结合,对于提升工 作效率及促进包装产业的发展具有较高的应用价值。

#### 参考文献:

- [1] 黄真,赵永生,赵铁石.高等空间机构学[M].2版.北京:高等教育出版社,2014:111-152.
  HUANG Z, ZHAO Y S, ZHAO T S. Advanced Spatial Mechanism[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2014: 111-152.
- [2] 戴建生,康熙,宋亚庆,等.可重构机构与可重构机器人:分岔演变的运动学分析、综合及其控制[M].北京:高等教育出版社,2021:152-220.
   DAI J S, KANG X, SONG Y Q, et al. Reconfigurable

Mechanisms and Robots[M]. Beijing: Higher Education Press, 2021: 152-220.

- [3] 马春生,米文博,尹晓秦,等. 2-SPR/(U+UPR)P(vA) 可重构并联机构的运动学与工作空间研究[J]. 机械传动, 2021, 45(6): 1-7.
  MACS, MIWB, YINXQ, et al. Research of Kinematics and Workspace of 2-SPR/(U+UPR)P(vA)Reconfigurable Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(6): 1-7.
- [4] 张春燕, 江毅文, 杨杰等. 可变向多地形移动全 R 副 并联机构[J]. 工程设计学报, 2023, 30(2): 189-199.
  ZHANG C Y, JIANG Y W, YANG Jie, et al. All-R Parallel Robots with Variable Direction and Multi-terrain Movement[J]. Chinese Journal of Engineering Design, 2023, 30(2): 189-199.
- [5] 贾维涵.可重构踝关节康复并联机器人机构设计及其 轨迹跟踪控制[D]. 天津:河北工业大学,2022:18-26.
  JIA W H. Mechanism Design and Trajectory Tracking Control of Reconfigurable Ankle Rehabilitation Parallel Robot[D]. Tianjin: Hebei University of Technology, 2022:18-26.
- [6] 徐帅, 尤晶晶, 叶鹏达, 等. 一种可重构 3-RRR 平面 并联机构及其工作空间分析[J]. 南京航空航天大学学 报, 2022, 54(3): 466-472.
  XU S, YOU J J, YE P D, et al. A Reconfiguration 3-RRR Planar Parallel Mechanism and Its Workspace Analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54(3): 466-472.
- [7] 徐杰, 宗光华, 于靖军, 等. 用于复合加载的异形虎克 铰设计与分析[J]. 机械设计与研究, 2012, 28(5): 1-3.
  XU J, ZONG G H, YU J J, et al. Design and Analysis of Profiled Universal Joint for Compound Loading[J].
  Machine Design & Research, 2012, 28(5): 1-3.
- [8] ESSOMBA T, HSU Y, SANDOVAL AREVALO J S, et al. Kinematic Optimization of a Reconfigurable Spherical Parallel Mechanism for Robotic-Assisted Craniotomy[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2019, 11(6): 060905.
- [9] HUANG G Y, GUO S, ZHANG D, et al. Kinematic Analysis and Multi-Objective Optimization of a New Reconfigurable Parallel Mechanism with High Stiffness[J]. Robotica, 2018, 36(2): 187-203.
- [10] JIA P, LI D L, ZHANG Y K, et al. A Novel Reconfigurable Parallel Mechanism Constructed with Spatial Metamorphic Four-Link Mechanism[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2022, 236(8): 4120-4132.

- [11] FANG H R, LIU P F, YANG H, et al. Design and Analysis of a Novel 2T2R Parallel Mechanism with the Closed-Loop Limbs[J]. International Journal of Automation and Computing, 2021, 18(4): 654-666.
- [12] YE W, HU L H, LI Q C. Kinematic Analysis and Dimension Optimization of a New Reconfigurable Parallel Mechanism with 1R2T and 2R1T Operation Modes[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2022, 14(6): 060914.
- [13] CHABLAT D, KONG X W, ZHANG C W. Kinematics, Workspace, and Singularity Analysis of a Parallel Robot with Five Operation Modes[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10(3): 035001.
- [14] LI D, GUO S, QU H B. A Novel Multiple Working Modes Parallel Mechanism with Variable Workspace[J].
   Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2020, 234(1): 211-224.
- [15] NURAHMI L, GAN D M. Reconfiguration of a 3-(rR)PS Metamorphic Parallel Mechanism Based on Complete Workspace and Operation Mode Analysis[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2020, 12(1): 011002.
- [16] 文杰, 马春生, 刘建国, 等. 基于 2-RCU/CUR 并联机

构的运动学分析[J]. 包装工程, 2022, 43(3): 228-233. WEN J, MA C S, LIU J G, et al. Kinematics Analysis Based on 2-RCU/CUR Parallel Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2022, 43(3): 228-233.

- [17] 樊文龙,李瑞琴,王春臻,等.一种用于物流快递分拣的 2-RPU/2-SPU 并联机构设计[J]. 包装工程, 2022, 43(7):178-183.
  FAN W L, LI R Q, WANG C Z, et al. Design of a 2-RPU/2-SPU Parallel Mechanism for Logistics and Express Sorting[J]. Packaging Engineering, 2022, 43(7): 178-183.
- [18] 甘东明. 空间机构的运动学分析及新型并联变胞机构 的设计[D]. 北京:北京邮电大学, 2009: 79-96.
  GAN D M. Kinematics of Spatial Mechanisms and Innovative Design of Metamorphic Parallel Mechanisms[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2009: 79-96.
- [19] 马春生,刘建国,文杰,等. 基于 2-PRU/PUU 并联机构的伴随运动与工作空间分析[J]. 机械传动, 2022, 46(9): 146-151.
  MA C S, LIU J G, WEN J, et al. Parasitic Motion and Workspace Analysis of Parallel Mechanism Based on 2-PRU/PUU[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(9): 146-151.