一种针对含非线性子结构多点耦合运输包装系统的解耦方法

王维凯[1]，王军[1]，卢立新[1]，潘嘹[1]，侯雪[2]
（1.江南大学，无锡 214122；2.汕头东风印刷股份有限公司无锡分公司，无锡 214000）

摘要：目的 考虑到运输包装系统耦合形式复杂，包装材料及包装结构具有非线性特性，不容易测量局部物理参数，需要对传统逆向子结构方法进行优化，使之能够求解非线性多点耦合系统中子结构的动态响应特性。**方法** 使用描述函数法将非线性的运输包装系统线性化，测量其在若干特定振动幅值下的频率响应函数；之后，应用逆向子结构方法和参数识别方法，计算包装件的模态参数；最后，拟合包装件模态参数与振动幅值之间的关系，构建函数来描述包装件的动态响应特性。**结果** 在集总参数模型中，解耦预测值与实际值吻合；在有限元模型中，对响应峰值的预测误差小于 5%，对响应跳跃现象所在频率的预测误差小于 3%。**结论** 该研究将传统逆向子结构方法的应用范围拓展到了非线性多点耦合系统，对复杂运输包装系统动力学模型的构建和防振包装的设计具有指导意义。

关键词： 逆向子结构方法；运输包装；振动；非线性
中图分类号： TB485.3 **文献标识码：** A **文章编号：** 1001-3563(2022)23-0252-07
DOI： 10.19554/j.cnki.1001-3563.2022.23.030

A Decoupling Method for Multi-coordinate Coupled Transport Packaging System Containing Nonlinear Sub-structure

WANG Wei-kai[1], *WANG Jun*[1], *LU Li-xin*[1], *PAN Liao*[1], *HOU Xue*[2]
(1. Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Wuxi Branch of Shantou Dongfeng Printing Co., Ltd., Wuxi 214000, China)

ABSTRACT: The work aims to optimize the traditional inverse sub-structuring method, to get the dynamic response characteristic of sub-structure in nonlinear multi-coordinate coupled system, which is helpful to resolve the issue that complex coupling forms and nonlinear characteristic of material make it difficult to measure the physical parameters in transport packaging system. The description function method is used to linearize the nonlinear system and the frequency response functions (FRFs) at several response amplitudes need to be measured. Then, the modal parameters of the sub-structure can be identified by inverse sub-structuring method. Lastly, the relationship between the modal parameters and vibration amplitudes is fitted and a function is constructed to describe the dynamic response characteristic of the sub-structure. In the lumped parameter model, the predicted response was consistent with the actual. In the finite element model, the prediction error of the response peak was less than 5%, and the prediction error of the jumping frequency was less than 3%. The application of traditional inverse sub-structuring method was extended to nonlinear multi-coordinate coupled system, which had guiding significance for the construction of dynamic model of complex transport packaging

收稿日期： 2022−02−28
基金项目： 国家一流学科建设轻工技术与工程（LITE 2018–29）
作者简介： 王维凯（1997—），男，硕士生，主攻运输包装。
通信作者： 王军（1982—），男，博士，教授，主要研究方向为运输包装、包装新材料。

system and the design of anti-vibration packaging.

KEY WORDS: inverse sub-structuring method; transport packaging; vibration; nonlinear

在现代缓冲包装设计流程中，设计师经常借助动力学计算和有限元仿真来确定缓冲材料和包装结构的参数。其中，包装件动态响应特性的获取是精准有效建立其动力学模型的关键[1]，然而，在实际运输过程中，产品、包装与运载车辆耦合联结在一起，构成复杂的运输包装系统，致使包装件的动态响应特性难以被直接测量[2]。此外，包装件在耦合状态与非耦合状态下的响应特性不同，对其单独测量的结果不能代表其在耦合状态下的特性。针对这一问题，王志伟、王军等[3-6]将逆向子结构方法应用到了运输包装领域，实现了对运输包装系统中子结构动态响应特性的间接预测。

为建立与实际情况更加接近的理论模型，逆向子结构方法在近年来持续发展。主要趋势有：为适应集装、堆码等复杂耦合情况，从单点耦合系统向多点耦合系统发展[7-8]；为重点考虑产品中的易损部件，从二级耦合系统向多级耦合系统发展[9]；设法降低误差，如利用奇异值分解方法抑制计算过程中矩阵求逆导致的误差放大[10-11]。

在以往研究中，均假设运输包装系统是线性的，而实际包装材料与包装结构具有非线性特性[12-14]，在使用传统逆向子结构方法进行分析时，将非线性结构视作线性结构会导致求解结果不准确。对此，笔者在之前的研究中，结合逆向子结构方法与参数识别技术，实现了对含非线性子结构耦合系统的解耦，其中只考虑了单点耦合的情况[15]。文中结合运输包装实际，针对含非线性子结构的多点耦合系统做进一步讨论，拓展了逆向子结构方法的应用范围，并分别在集总参数模型和有限元模型中进行了验证。

1 理论方法

包装件与运载车辆之间的耦合关系见图 1a，该耦合系统可抽象化为图 1b 所示的物理模型，文中以该模型为基础进行理论分析。

1.1 非线性系统线性化

逆向子结构方法需要测量系统的频率响应函数来进行解耦运算，而非线性系统不具备传统意义上的频率响应函数，因此需要将其线性化。

非线性结构的动力学方程可以写成：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{N}_{\mathrm{L}}=\boldsymbol{f} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵；$\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{N}_{\mathrm{L}}$ 分别为外部激励力向量和内部非线性力向量；$\boldsymbol{x}$ 为位移向量。

假设激励是简谐振动，根据欧拉公式，$\boldsymbol{f}$ 在时域上能被写成：

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{F}$ 为简谐激励 $\boldsymbol{f}$ 的幅值；ω 为激励的角频率；e 为自然常数，i 为虚数单位。

非线性结构的稳态响应以级数形式表示为：

$$\boldsymbol{x}=\sum_{r=1}^{\infty}\boldsymbol{x}_r=\sum_{r=1}^{\infty}\boldsymbol{X}_r\mathrm{e}^{r\mathrm{i}\omega t} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{x}_r$ 为结构的第 r 阶谐波响应；$\boldsymbol{X}_r$ 为第 r 阶谐波响应的幅值。通常，第 1 阶谐波是响应的主要成分，而其他阶次谐波相对较小[16]。在忽略高阶谐波的前提下，式（3）可写成：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{4}$$

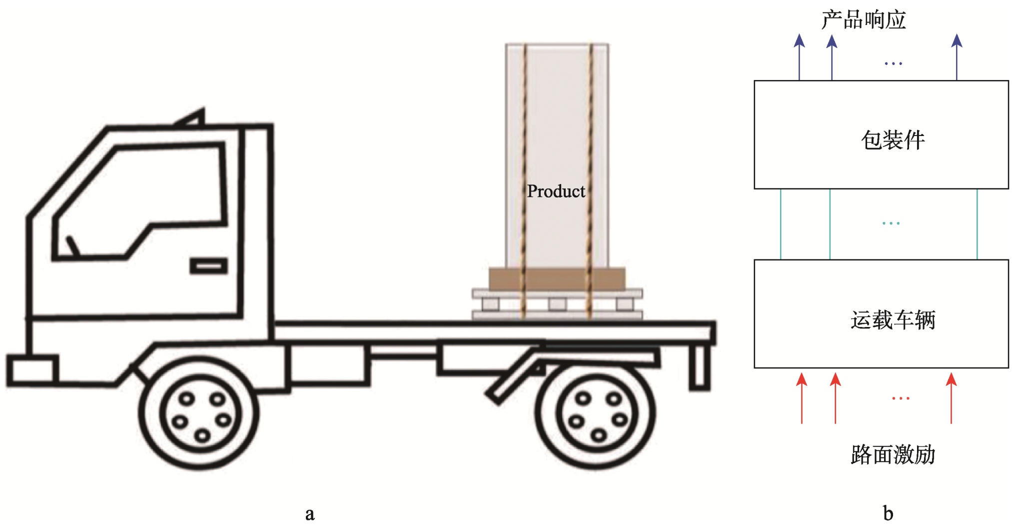


图 1 包装件–运载车辆耦合系统
Fig.1 Package-carrier coupled system

式中：$\boldsymbol{X}$ 为第 1 阶谐波响应的幅值。与之对应地，非线性内力也只考虑第 1 阶谐波，并设 $\boldsymbol{N}$ 为第 1 阶内部非线性力的幅值，得到：

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{N}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{5}$$

将式（2）、（4）和（5）代入到式（1）中，得到：

$$\left(-\omega^2\boldsymbol{M}+\mathrm{i}\omega\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{N}=\boldsymbol{F} \tag{6}$$

如果该结构的非线性特征体现为：刚度随响应幅值的变化而变化。那么，根据描述函数法[16]，可以把非线性内力的幅值 $\boldsymbol{N}$ 写成响应幅值 $\boldsymbol{X}$ 的一次函数，即：

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{\varDelta}\boldsymbol{X} \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{\varDelta}$ 为描述函数矩阵。矩阵内部各位置的元素为：

$$\begin{cases} \varDelta_{ii} = v_{ii} + \displaystyle\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} v_{ij} \\ \varDelta_{ij} = -v_{ij} \end{cases} \tag{8}$$

式中：$\varDelta_{ii}$ 为位于矩阵中第 i 行 i 列的元素；$\varDelta_{ij}$ 为位于矩阵中第 i 行 j 列的元素；v_{ii} 为结构中坐标 i 和地面之间的非线性力的描述函数；v_{ij} 为结构中坐标 i 和坐标 j 之间非线性力的描述函数。v_{ii} 和 v_{ij} 的值均与响应幅值 $\boldsymbol{X}$ 有关，因此，$\boldsymbol{\varDelta}$ 是随 $\boldsymbol{X}$ 变化的函数。在此基础上，式（7）能被表示成式（9）的形式。

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} \tag{9}$$

其中：

$$\boldsymbol{Q} = \left(-\omega^2\boldsymbol{M} + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K} + \boldsymbol{\varDelta}\right)^{-1} \tag{10}$$

$\boldsymbol{Q}$ 在文中被称作准线性频率响应函数矩阵，它的值与结构的振动幅值 $\boldsymbol{X}$ 有关，只能表征结构在特定振动幅值下的响应特性。

至此，实现了非线性结构的线性化，得到了非线性结构的准线性频率响应函数。

1.2 逆向子结构方法

将图 1 所示的包装件—运载车辆耦合系统抽象化，考虑一个由非线性子结构 A 和线性子结构 B 组成的系统 S，见图 2。2 个子结构之间通过 n 对耦合点连接在一起。图 1 中，i_{a} 和 i_{b} 分别表示非线性子结构 A 和线性子结构 B 的内部自由度，c_{a} 和 c_{b} 分别表示它们的耦合自由度，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}$ 为耦合刚度矩阵。

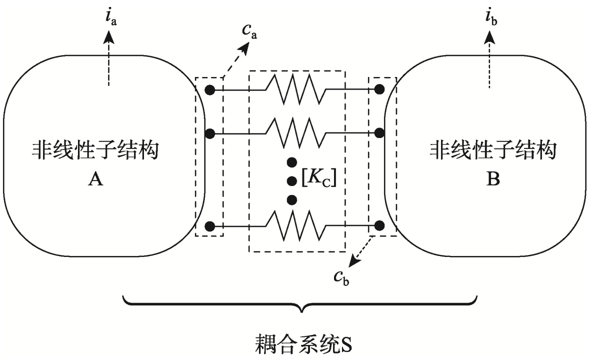


图 2 包含非线性子结构的多点耦合系统
Fig.2 Multi-coordinate coupled system containing nonlinear sub-structure

其准线性频率响应函数矩阵可表示为：

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}} = \left(-\omega^2\boldsymbol{M}_{\mathrm{S}} + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{S}} + \boldsymbol{\varDelta}_{\mathrm{S}}\right)^{-1} \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{M}_{\mathrm{S}}$、$\boldsymbol{C}_{\mathrm{S}}$ 和 $\boldsymbol{K}_{\mathrm{S}}$ 分别为系统 S 的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵；$\boldsymbol{\varDelta}_{\mathrm{S}}$ 为系统 S 中以描述函数法线性化的非线性内力矩阵。$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}}$ 和 $\boldsymbol{\varDelta}_{\mathrm{S}}$ 随响应幅值 $\boldsymbol{X}$ 变化。

系统 S 的动力学方程可写作：

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{X}_{\mathrm{ia}} \\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{ca}} \\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{cb}} \\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{ib}} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{ia}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{ca}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{cb}} \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{ib}} \end{Bmatrix} \tag{12}$$

其中：

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,iaia}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,iaca}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,iacb}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,iaib}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,caia}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,caca}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cacb}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,caib}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbia}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbca}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbcb}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbib}} \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,ibia}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,ibca}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,ibcb}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,ibib}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

举例说明式（13）中变量的物理含义：$[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,iaia}}]$ 表示耦合系统 S 中，自由度 i_{a} 的准线性驱动点频率响应函数；$[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,iaca}}]$ 表示耦合系统 S 中，从自由度 c_{a} 到自由度 i_{a} 的准线性跨点频率响应函数。

另一方面，根据力的平衡条件，可得：

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_{\mathrm{ca}} = \boldsymbol{Q}_{\mathrm{A,caca}}{}^{-1}\boldsymbol{X}_{\mathrm{ca}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{ca}} - \boldsymbol{X}_{\mathrm{cb}}) \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{cb}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{B,cbcb}}{}^{-1}\boldsymbol{X}_{\mathrm{cb}} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{cb}} - \boldsymbol{X}_{\mathrm{ca}}) \end{cases} \tag{14}$$

式中：$[\boldsymbol{H}_{\mathrm{B,cbcb}}]$ 为线性子结构 B 中，耦合自由度 c_{b} 的驱动点频率响应函数。

结合式（12）、（13）、（14）可得到二级耦合系统的解耦公式：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{A,caca}} = {} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cacb}}\left(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbcb}} - \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cacb}}\right)^{-1} \cdot \\ & \left(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,caca}}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbca}}{}^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbcb}} - \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cacb}}\right) \end{aligned} \tag{15}$$

式（15）在本研究之前已有其他研究者得出，其含义是非线性子结构 A 的准线性频率响应函数可通过对耦合系统 S 进行测量得出。

与单点耦合系统相比，多点耦合系统中的耦合坐标有 n 个，因此，频率响应函数矩阵中对应位置的元素为 n 维矩阵。以两点耦合系统（耦合自由度为 c_{a1} 和 c_{a2}）为例，其耦合自由度的准线性频率响应函数矩阵表示为：

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,caca}} = \begin{bmatrix} Q_{\mathrm{S,ca_1ca_1}} & Q_{\mathrm{S,ca_1ca_2}} \\ Q_{\mathrm{S,ca_2ca_1}} & Q_{\mathrm{S,ca_2ca_2}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

1.3 基于模态参数识别的响应特性求解

因为非线性系统的准线性频率响应函数 $\boldsymbol{Q}$ 是在唯一固定的响应幅值 $\boldsymbol{X}$ 下确定的，因此，由式（15）只能得到非线性子结构在特定振动幅值下的响应特性，而无法预测其在任意大小激励下的响应特性。对此，提出一种基于模态参数识别的求解策略。

首先，使用激振器给系统施加 m 种不同幅值的激励，记录非线性子结构中某点的响应幅值 X，测得系统在 m 种不同响应幅值 X 下的准线性频率响应函数 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}}(X_1), \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}}(X_2), \ldots, \boldsymbol{Q}_{\mathrm{S}}(X_m)$。之后，应用模态参数识别技术求解出对应于每个响应幅值的固有频率和阻尼比。经此过程，会得到与响应幅值有关的一组固有频率$\{\omega_{\mathrm{n}1}, \omega_{\mathrm{n}2}, \ldots\ldots, \omega_{\mathrm{n}m}\}$和一组阻尼比$\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots, \zeta_m\}$。最后，以 X 作为自变量，分别拟合其与固有频率 ω_{n} 和阻尼比 ζ 的关系，得到 $\omega_{\mathrm{n}}(X)$和 $\zeta(X)$，两者都是 X 的函数。

对应于黏性阻尼系统频率响应函数的模态表达式，将作为响应幅值函数的模态参数代入到频率响应函数表达式中，可以重构出非线性结构关于响应幅值的频率响应函数 $Q(X,\omega)$，其表达式为：

$$Q(X,\omega)=\sum_{r=1}^{q}\frac{C_r(X)}{(\omega_{\mathrm{n}r}(X))^2-\omega^2+2\mathrm{i}\omega\zeta_r(X)\omega_{\mathrm{n}r}(X)} \tag{17}$$

式中：q 为所分析的模态数；$\omega_{\mathrm{n}r}$ 为第 r 阶模态的固有频率；ζ_r 为第 r 阶模态的阻尼比；$C_r(X)$为第 r 阶模态频率响应函数表达式中的常数项。

根据频率响应函数的定义，有：

$$\sum_{r=1}^{q}\frac{C_r(X)}{(\omega_{\mathrm{n}r}(X))^2-\omega^2+2\mathrm{i}\omega\zeta_r(X)\omega_{\mathrm{n}r}(X)}=\frac{X}{F} \tag{18}$$

对式（18）进行求解，即可求得测量点在任意大小激励 F 下的响应 X。

2 模型验证

2.1 集总参数模型

该节中，参考一般运载车辆的结构，建立了一个含非线性部件的集总参数模型，见图 3。通过对这个模型的分析，来验证所提出解耦方法的可靠性。

该模型由非线性子结构 A 和线性子结构 B 两部分组成。子结构 A 代表具有非线性特性的包装件，子结构 B 代表运载车辆。其中，m 为集中质量，集中质量之间存在线性刚度 k 和线性阻尼 c，它们的下标为不同位置参数的编号。在子结构 A 中加入一个非线性弹簧 k_{NL}，以体现包装材料和包装结构的非线性，这使得子结构 A 成为一个非线性子结构，也使得整个系统成为一个非线性系统。2 个子结构之间通过弹簧 k_4 和 k_5、阻尼 c_4 和 c_5，形成两点耦合。模型中参数的值见表 1。

下面说明如何在不拆解结构、只能在耦合状态下激励和测量的前提下，计算非线性子结构 A 的振动响应特性。

假设非线性弹簧 k_{NL} 具有立方刚度的性质，其非线性内力 N_{L} 表示为

$$N_{\mathrm{L}}=k_{\mathrm{NL}}x^3 \tag{19}$$

式中：k_{NL} 的值为 1×10^7 N/m^3。

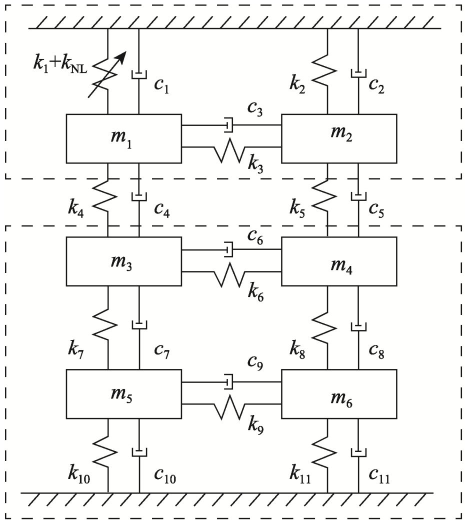


图 3 包含非线性部件的多点耦合系统集总参数模型
Fig.3 Lumped parametric model of multi-coordinate coupled system containing nonlinear sub-structure

表 1 集总参数模型中参数的值
Tab.1 Parameters in the lumped parameter model

质量/kg	刚度/(N·m^{-1})	阻尼/(N·s·m^{-1})
m_1=2	k_1=50 000	c_1=2
m_2=2	k_2=30 000	c_2=2
m_3=1	k_3=25 000	c_3=1
m_4=1	k_4=35 000	c_4=1.5
m_5=3	k_5=30 000	c_5=1.5
m_6=3	k_6=40 000	c_6=1
—	k_7=45 000	c_7=2
—	k_8=45 000	c_8=2
—	k_9=35 000	c_9=1.5
—	k_{10}=40 000	c_{10}=2
—	k_{11}=50 000	c_{11}=2

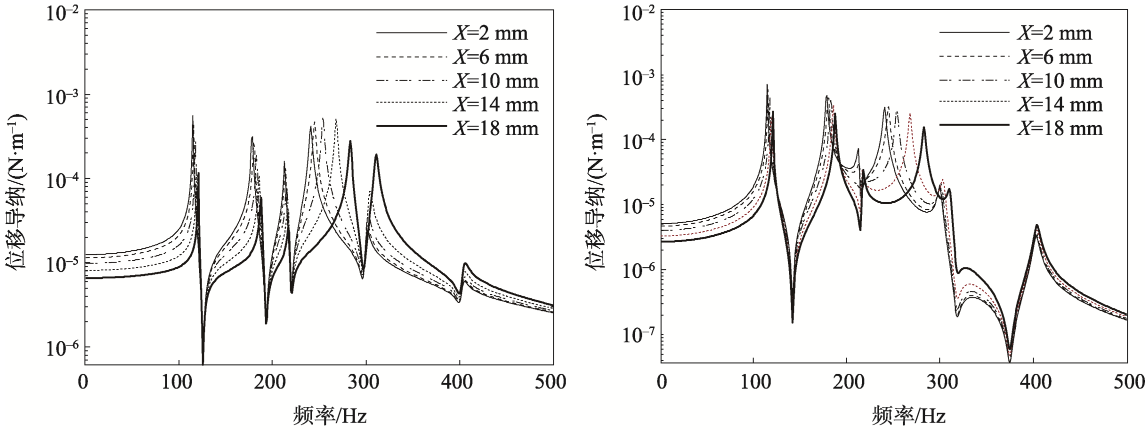
该系统的准线性频率响应函数可由式（11）给出，其中：

$$v_{11}=\frac{3}{4}k_{\mathrm{NL}}X^2 \tag{20}$$

控制 m_1 处的振幅 X 从 2 mm 增加到 20 mm，计算耦合自由度 ca 在不同振幅下的准线性频率响应函数。以 $Q_{\mathrm{S,ca1ca1}}$ 和 $Q_{\mathrm{S,ca1ca2}}$ 为例，其部分响应特性见图 4，可见该结构的响应特性会随响应幅值而改变，具有明显的非线性特征。

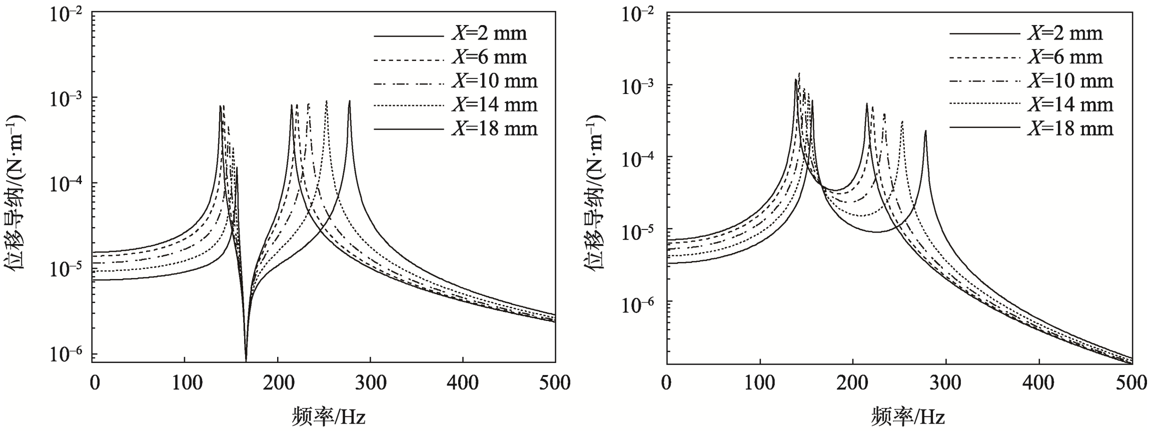
类似地，分别计算出 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cacb}}$、$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbcb}}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{S,cbca}}$，将它们代入到式（14）中，可解耦得到非线性子结构 A 的准线性频率响应函数 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{A,caca}}$，见图 5。可以看出，子结构 A 的一阶固有频率会随响应幅值的增加而递增，表现出渐硬的特性。

为检验该解耦方法的准确性，以非耦合状态下的子结构 A 为对象，应用谐波平衡法直接计算 m_1 处驱动点频率响应函数在若干振幅下的实际值，将其与预测值进行比较，结果见图 6，两者保持高度一致。



a m_1处驱动点频率响应函数$Q_{\mathrm{S,ca1ca1}}$　　b m_2到m_1的跨点频率响应函数$Q_{\mathrm{S,ca1ca2}}$

图 4　子结构 A 耦合自由度频率响应函数在不同响应幅值下的测量结果
Fig.4 Measured FRFs of sub-structure A at different response amplitudes



a m_1处驱动点频率响应函数$Q_{\mathrm{A,ca1ca1}}$　　b m_2到m_1的跨点频率响应函数$Q_{\mathrm{A,ca1ca1}}$

图 5　子结构 A 耦合自由度频率响应函数在不同响应幅值下的解耦结果
Fig.5 Decoupled FRFs of sub-structure A at different response amplitudes

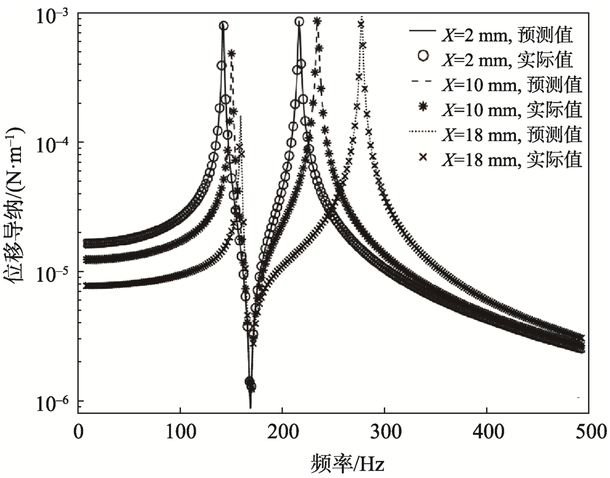


图 6　m_1处驱动点频率响应函数在不同响应幅值下的预测值与实际值对比
Fig.6 Comparison of predicted and actual FRFs at m_1 at different response amplitudes

基于非线性子结构 A 的 m_1 处的驱动点频率响应函数，应用多项式拟合法识别其模态参数，并拟合模态参数与非线性弹簧响应幅值之间的函数关系。将各模态参数作为振幅的函数代入到式（17）中，可以重构出式（21）函数来描述的 m_1 处的振动响应特性：

$$Q_{m_1}(X,\omega)=\frac{C_1(X)}{\left[\omega_{\mathrm{n1}}(X)\right]^2-\omega^2+2\mathrm{i}\omega\zeta_1(X)\omega_{\mathrm{n1}}(X)}+\frac{C_2(X)}{\left[\omega_{\mathrm{n2}}(X)\right]^2-\omega^2+2\mathrm{i}\omega\zeta_2(X)\omega_{\mathrm{n2}}(X)} \tag{21}$$

假设外部激励 F 为 20 N，而激励的位移幅值不再固定，作用于 m_1 处对子结构 A 进行正向扫频，根据式（18）所给出的关系，即可对位移响应 X 进行求解，这里使用的求解方法为牛顿迭代法。解得 m_1 处的驱动点频率响应函数，并将其与理论值进行比较，结果见图 7。可见两者高度一致，且精准预测了对非线性结构进行扫频时出现的响应跳跃现象。

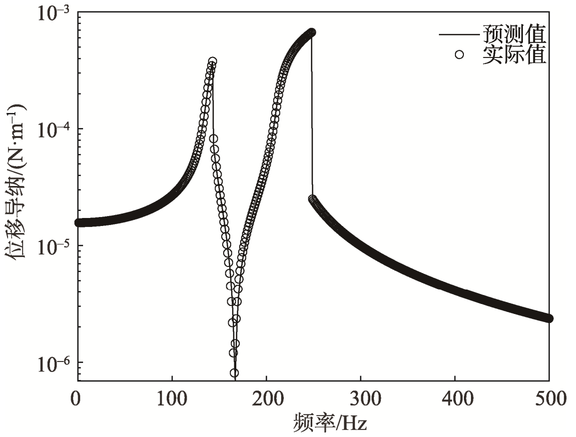


图 7　在 m_1 处进行扫频激励的频率响应函数预测值与理论值对比

Fig.7 Comparison of predicted and theoretical FRFs at m_1 under sweep excitation

2.2　有限元模型

在此节中，建立了一个包含非线性子结构的多点耦合系统有限元模型，并通过对其进行频率响应分析来检验文中所提出理论在连续体模型中的应用效果。该模型由一个具有线性刚度特性的悬臂梁和一个具有非线性刚度特性的 T 型梁通过 2 根弹簧连接而成，模型装配效果及几何参数见图 8。

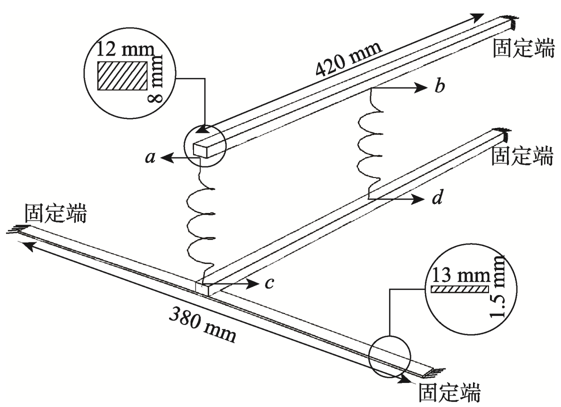


图 8　包含非线性部件的多点耦合系统有限元模型及其几何参数

Fig.8 Finite element model of multi-coordinate coupled system and its geometric parameters

文中所使用的有限元建模与分析软件为 ABAQUS。在软件环境中完成建模后，设置如下材料参数与约束条件：构成悬臂梁和 T 型梁的材料均为钢，其弹性模量为 200 GPa，泊松比为 0.3，密度为 7 800 kg/m^3。上方悬臂梁为线性子结构，在其固定端设置完全固定约束；下方的 T 形梁为非线性子结构，由一根悬臂梁和一根两端固定薄梁刚性连接而成，在连接位置设置绑定约束，在其固定端设置完全固定约束。a 点与 c 点、b 点与 d 点之间各有一根刚度均为 5 000 N/m 的弹簧连接，通过设置弹簧连接器实现。

应用文中所提出的解耦策略，可以在不对模型进行拆解的前提下，通过测量该系统在 4 个耦合点的频率响应函数，来预测非线性子结构（即 T 型梁）的频率响应函数。利用有限元软件对该模型进行模态分析，得到其一阶模态的有效质量占结构实际质量的 83.2%，因此可以判断该模型的响应主要受一阶模态影响，文中考虑其一阶模态。

对系统进行激振，控制 c 点的响应幅值分别为 0.5、1、1.5、2、2.5、3 mm，测量每个响应幅值下各耦合点的准线性频率响应函数，它们组成了系统耦合自由度的准线性频率响应函数矩阵。将它们代入到式（15）中，即可求得非线性子结构在不同响应幅值下的准线性频率响应函数。以 a 点为例，其驱动点频率响应函数的求解结果见图 9。对该频率响应函数进行参数识别，并拟合模态参数与响应幅值的关系。

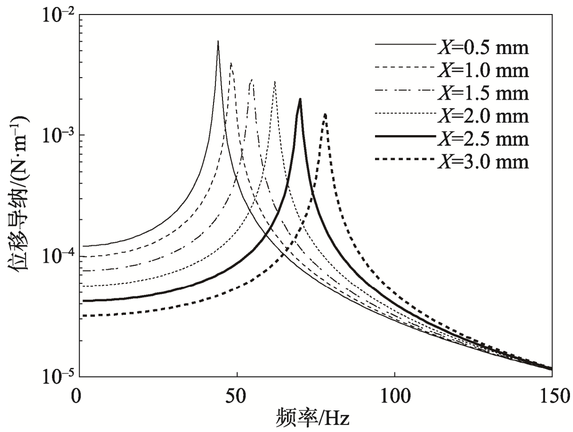


图 9　a 点的驱动点频率响应函数在不同响应幅值下的解耦结果

Fig.9 Decoupled results of the drive-point FRFs at a at different response amplitudes

只要给定激励的幅值 F，即可代入式（18）进行求解。为验证求解结果，使用 ABAQUS 显式动力学模块对激励为 1 N 时若干频率点的响应进行计算，并将计算值与预测值进行对比，结果见图 10，两者保持高度一致。

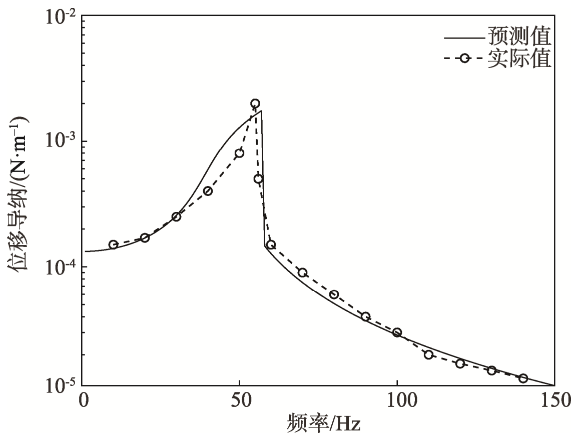


图 10　在 a 点进行扫频激励的频率响应函数预测值实际值对比

Fig.10 Comparison of predicted and theoretical FRFs at a under sweep excitation

3 结语

考虑到包装结构和包装材料的非线性与运输包装系统耦合形式的复杂性，文中提出了一种针对非线性多点耦合系统的解耦方法，能够在不拆解系统的前提下，通过测量运输包装系统的频率响应函数来求解包装件的动态响应特性，具体步骤如下。

1）使用激振器对系统施加简谐激励，测量系统耦合位置在不同响应幅值下的准线性频率响应函数。

2）使用逆向子结构方法求解非线性子结构在不同响应幅值下的准线性频率响应函数。

3）识别非线性子结构的模态参数并拟合其模态参数与响应幅值之间的关系。

4）构建激励幅值与响应幅值之间的关系方程并进行求解。

在集总参数模型和有限元连续模型中，文中方法对非线性子结构振动响应特性的预测结果与实际值基本吻合，证明了其有效性，在运输包装系统参数获取与模型构建、运输过程产品状态监测等方面具备应用前景。

参考文献：

[1] WANG zhi-wei, ZHONG lin-lin. Finite Element Analysis and Experimental Investigation of Beer Bottle-Turnover Boxes Transport Unit under Random Vibration Excitation[J]. Packaging Technology and Science, 2020, 33(6): 197-214.

[2] 高德，吴朝武，陆俊杰. 运输包装系统振动行为研究与发展趋势分析[J]. 包装工程, 2020, 41(15): 51-58.
GAO De, WU Chao-wu, LU Jun-jie. Dynamic Behavior Research and Dynamic Development of Transportation Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2020, 41(15): 51-58.

[3] WANG Zhi-wei, ZHANG Yuan-biao. Dynamic Characteristic Analysis of Refrigerator-Truck Transport System by Using Inverse Substructure Method[J]. Packaging Technology and Science, 2014, 27(11): 883-900.

[4] ZHANG Yuan-biao, WANG Zhi-wei. Investigation of Frequency Response Function of Product-Transport System Based on Multi-Coordinate Coupled Inverse Substructure Method[J]. Packaging Technology and Science, 2014, 27(5): 364-375.

[5] WANG Jun, SUN Guo-hua, LU Li-xin, et al. Indirect Inverse Substructuring Theory for Coupling Dynamic Stiffness Identification of Complex Interface between Packaged Product and Vehicle Transport System[J]. Packaging Technology and Science, 2015, 28(2): 141-155.

[6] WANG Jun, WANG Qi-li, LU Li-xin, et al. Inverse Sub-Structuring Theory for Coupled Product Transport System Based on the Dummy Masses Method[J]. Packaging Technology and Science, 2016, 29(3): 189-200.

[7] WANG Jun, HONG Xiang, QIAN Yi, et al. Inverse Sub-Structuring Method for Multi-Coordinate Coupled Product Transport System[J]. Packaging Technology and Science, 2014, 27(5): 385-408.

[8] MENG Tian-ya, WANG Jun, PU Guang-yi, et al. Inverse Sub-Structuring Method for Multi-Coordinate Rigidly Coupled Product Transport System Based on a Novel Shearing Probe Technique[J]. Packaging Technology and Science, 2017, 30(9): 601-618.

[9] WANG Jun, WANG Zhi-wei, LU Li-xin. Step-by-Step Decoupling Method for Inverse Substructuring Analysis of a Three-Component Coupled Packaging System[J]. Journal of Vibration and Control, 2015, 21(4): 676-683.

[10] 傅苗苗，王军，卢立新，等. 多重门限奇异值分解方法的实例验证[J]. 包装工程, 2021, 42(21): 176-180.
FU Miao-miao, WANG Jun, LU Li-xin, et al. Example Verification of Multi-Threshold Singular Value Decomposition Method[J]. Packaging Engineering, 2021, 42(21): 176-180.

[11] 傅苗苗，王军，卢立新，等. 基于频率响应函数的逆子结构方法误差分析[J]. 包装工程，2021，42(23): 141-145
FU Miao-miao, WANG Jun, LU Li-xin, et al. Error Analysis of the Inverse-Substructuring Method Based on Frequency Response Function[J]. Packaging Engineering, 2021, 42(23): 141-145

[12] JOODAKY A, BATT G S, GIBERT J M. Prediction of Cushion Curves of Polymer Foams Using a Nonlinear Distributed Parameter Model[J]. Packaging Technology and Science, 2020, 33(1): 3-14.

[13] YANG Song-ping, WANG Zhi-wei. Acceleration Spectrum Analysis of Hyperbolic Tangent Package under Random Excitation[J]. Packaging Technology and Science, 2021, 34(9): 579-587.

[14] 应玉萍，王花兰. 基于几何非线性的果蔬运输隔振系统设计[J]. 包装工程, 2020, 41(19): 153-158.
YING Yu-ping, WANG Hua-lan. Design of Vibration Isolation System for Fruit and Vegetable Transportation Based on Geometric Nonlinearity[J]. Packaging Engineering, 2020, 41(19): 153-158.

[15] WANG Peng-tao, WANG Jun, LIM T C, et al. A Strategy for Decoupling of Nonlinear Systems Using the Inverse Sub-Structuring Method and the Parametric Modal Identification Technique[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 140: 106695.

[16] KARAAĞAÇLı T, OZGUVEN H N. Experimental Modal Analysis of Nonlinear Systems by Using Response-Controlled Stepped-Sine Testing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 146: 107023.

责任编辑：曾钰婵