

# 具有一移动两转动并联机构设计及运动学分析

季晔<sup>1</sup>, 张婧<sup>2</sup>

(1. 洛阳理工学院, 河南 洛阳 471023; 2. 许昌职业技术学院, 河南 许昌 461000)

**摘要:** **目的** 针对食品行业包装工作量大, 人工成本逐级提高且易出错的现状, 设计一种能实现复杂运动的新型并联机构。 **方法** 利用螺旋理论分析支链运动螺旋和约束螺旋, 通过修正的 Kutzbach-Grübler 公式计算机构自由度。根据机构学和几何学关系, 建立机构输入、输出参数关系方程; 通过位置关系方程, 得到机构输入、输出的速度和加速度关系方程。由于机构速度雅克比矩阵复杂, 将判断矩阵是否满秩问题转化为多元函数求极值问题。根据机构约束条件, 计算机构运动平台工作空间。建立机构位置正解的适应度评价函数, 将改进的粒子群优化算法与迭代法相结合, 求解机构位置正解。利用五次多项式对动平台中心点运动位姿进行轨迹规划, 得到运动学输入参数的变化规律。 **结果** 机构具有一移动两转动自由度。通过对上述问题数学模型的求解发现, 机构不存在明显奇异位形, 且工作空间连续, 姿态角运动范围大。求得了机构高精度位置正解, 驱动副运动学参数变化平稳, 符合轨迹规划预期。 **结论** 该新型并联机构满足食品抓取和装箱时所需的大工作空间要求, 可以实现平稳运动, 计算结果为机构动力学分析和实时控制奠定了理论基础。

**关键词:** 并联机构; 运动学分析; 轨迹规划; 自由度

**中图分类号:** TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2021)01-0206-08

**DOI:** 10.19554/j.cnki.1001-3563.2021.01.029

## Design and Kinematics Analysis of One-translation and Two-rotation Parallel Mechanism

Ji Ye<sup>1</sup>, ZHANG Jing<sup>2</sup>

(1. Luoyang Institute of Science and Technology, Luoyang 471023, China;

2. Xuchang Vocational Technical College, Xuchang 461000, China)

**ABSTRACT:** The work aims to design a new parallel mechanism that can achieve complex motion in view of the status in the food industry, including large packaging workload, increasing labor cost and error-prone features. The spiral theory was used to analyze movement and constraint spirals of limb and the modified Kutzbach-Grübler formula was adopted to calculate the freedom of this mechanism. According to the relationship between mechanics and geometry, the relationship equation between the input parameters and output parameters of mechanism was built. Through the position relation equation, the relation equation of the velocity and acceleration about input and output of mechanism was obtained. Due to the complexity of the jacobian matrix, the problem of determining the matrix full rank was transformed into the problem finding the extremum of the multivariate function. According to the constraints of the mechanism, the working space of the motion platform about the mechanism was calculated. The fitness evaluation function of the positive solution of the mechanism was established and the positive position solution was solved by a method combining particle swarm optimi-

收稿日期: 2020-05-03

基金项目: 河南省科技厅项目 (172102210396)

作者简介: 季晔 (1982—), 男, 博士, 洛阳理工学院讲师, 主要研究方向为并联机器人机构学。

ization (ps) with iterative method. The trajectory planning of the center position about moving platform was carried out by the quintic polynomial, and the change rule of the kinematics input parameters was obtained. The results showed that this mechanism had one-translation and two-rotation degree of freedoms. By solving these mathematical models, it was found that the mechanism had no obvious singular configuration and the workspace was continuous and large. The high-precision positive position solution of the mechanism was obtained and the kinematics parameter of driving pair changed smoothly, conforming to the trajectory planning expectation. The new parallel mechanism can meet the requirement of large working space when food is grabbed and packed and realize smooth movement, and the results provide the theoretical basis for the dynamics analysis and real-time control of the mechanism.

**KEY WORDS:** parallel mechanism; kinematics analysis; trajectory planning; degree of freedom

与六自由度并联机构相比, 少自由度并联机构输入、输出参数少, 往往控制更为容易, 开发成本低。三自由度并联机构包括三平移 (3T)、两转动一移动 (2R1T)、一转动两移动 (1R2T) 和三转动 (3R) 等 4 类机构。

3T 并联机构在机械加工、食品包装等生产现场已广泛使用, 且此类运动模式机构更易于解耦和获得高精度位置解, 因此国内外学者进行了大量研究。Clavel 在 1985 年发明了 Delta 并联机构, 瑞士 Demarex 公司购买了该机构专利, 并成功地将其产业化, 已成为如今使用最为广泛的机构构型之一<sup>[1-2]</sup>。Zhao<sup>[3]</sup>考虑机构各向异性, 分析了一种 3T 并联机构运动学, 并进行了尺度分析。葛正浩<sup>[4]</sup>研究了 3T 并联机构, 并进行了运动学分析。孙驰宇<sup>[5]</sup>研究了零耦合度部分运动解耦的三平移并联机构。沈惠平<sup>[6]</sup>基于方位特征方程设计了一种仅由移动副和转动副组成的 3T 并联机构。

与 3T 并联机构相比, 2R1T 并联机构运动更为复杂和多样化<sup>[7]</sup>。2R1T 并联机构可以用于五轴混联数控机床, 五轴或六轴混联机构还可以用于大型复杂覆盖件的组装和焊接<sup>[8]</sup>。侯雨雷等<sup>[9]</sup>提出了 U-RCRR-CRRR 两转动一移动解耦并联机构, 研究了含运动副间隙的动力学响应。刘伟等<sup>[10]</sup>运用位移流形理论综合了 2R1T 并联机构, 并提出了 2R1T 和 3R 运动模式转变的方法。汪满新等<sup>[11]</sup>研究了 2R1T 并联机构拓扑结构综合方法。何延等<sup>[12]</sup>对一种三角化解耦 2R1T 并联机构进行型综合, 并进行了运动仿真。Sun 等<sup>[13]</sup>综合了一类具有派生运动的 2R1T 并联机构。HUANG Tian 等<sup>[14]</sup>综合了含过约束的 2R1T 并联机构。José Cazalilla 等<sup>[15]</sup>系统研究了一种 2R1T 并联机构力/位置实时控制, 并进行了仿真和实验。

对于 2R1T 并联机构的研究, 学者们更多关注于机构型综合, 即获得新机构的方法研究。机构的运动学和动力学分析和计算方法亦非常重要, 分析结果会决定机构是否易于控制和应用前景。文中拟设计一种三自由度并联机构, 该机构具有 2 个转动和 1 个移动自由度, 在机构运动平台上增加吸盘, 可以用于包装过程的堆码和拆卸生产线。

## 1 机构构型分析

并联机构由 2 个 PRU 支链和 1 个 PRS 组成, 其中 U 副和 S 副与运动平台相连, 3 个铰点在运动平台上按等边三角形分布; P 副为驱动副, 由缸体和活塞组成, 缸体通过地脚螺栓与地面相连, 亦成等边三角形分布, 机构简图见图 1。

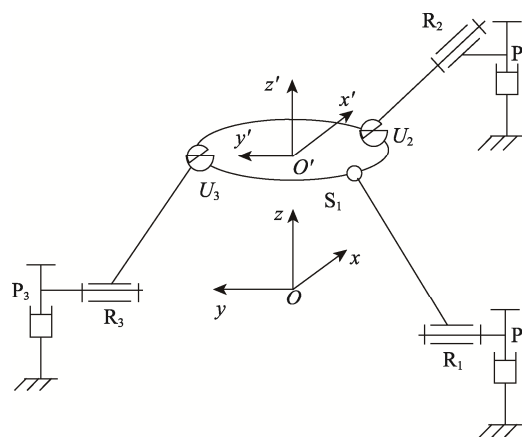


图 1 2PRU/PRS 并联机构

Fig.1 2PRU/PRS parallel mechanism

以  $P_1R_1S_1$  (第 1) 支链为分析对象, 在  $S_1$  副处建立支链笛卡尔直角坐标系, 支链的运动螺旋见图 2。

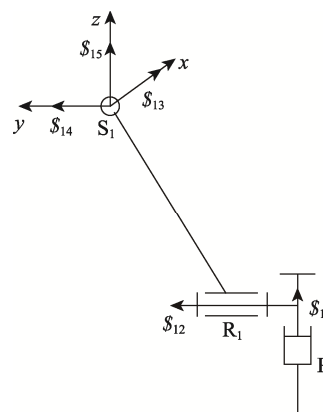


图 2 PRS 支链运动螺旋

Fig.2 PRS-limb movement spiral

第 1 支链的运动螺旋系为:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{11}=(0 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 1) \\ \mathcal{S}_{12}=(0 \ 1 \ 0;N_1 \ 0 \ N_2) \\ \mathcal{S}_{13}=(1 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{14}=(0 \ 1 \ 0;0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{15}=(0 \ 0 \ 1;0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $N_1, N_2$  为非零实数, 数值由杆件  $S_1R_1$  尺度参数决定。

支链的约束螺旋为:

$$\mathcal{S}_{11}^r=(0 \ 1 \ 0;0 \ 0 \ 0) \quad (2)$$

以  $P_2R_2U_2$  (第 2) 支链为分析对象, 在  $U_2$  副处建立支链笛卡尔直角坐标系, 支链的运动螺旋见图 3。

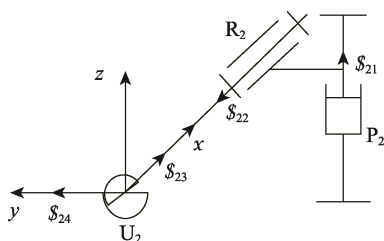


图 3 PRU 支链运动螺旋  
Fig.3 PRU-limb movement spiral

第 2 支链的运动螺旋系为:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{21}=(0 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 1) \\ \mathcal{S}_{22}=(1 \ 0 \ 0;0 \ N_3 \ N_4) \\ \mathcal{S}_{23}=(1 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{24}=(0 \ 1 \ 0;0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $N_3, N_4$  为非零实数, 数值由杆件  $U_2R_2$  尺度参数决定。

支链的约束螺旋系为:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{21}^r=(1 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{22}^r=(0 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 1) \end{cases} \quad (4)$$

与  $P_2R_2U_2$  支链分析过程相似, 在  $P_3R_3U_3$  (第 3) 支链的  $U_3$  副处建立与支链  $P_2R_2U_2$  方向相同的笛卡尔直角坐标系, 运动螺旋系为:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31}=(0 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 1) \\ \mathcal{S}_{32}=(0 \ 1 \ 0;N_5 \ 0 \ N_6) \\ \mathcal{S}_{33}=(1 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{34}=(0 \ 1 \ 0;0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (5)$$

式中:  $N_5, N_6$  为非零实数, 数值由杆件  $U_3R_3$  尺度参数决定。

支链的约束螺旋系为:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{31}^r=(0 \ 1 \ 0;0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{32}^r=(0 \ 0 \ 0;0 \ 0 \ 1) \end{cases} \quad (6)$$

在运动平台几何中心建立运动坐标系  $O'-x'y'z'$ ,

在地面建立固定坐标系  $O-xyz$ 。机构处于图 1 的初始位置时, 坐标系  $\{O'\}$  和  $\{O\}$  各坐标轴互相平行, 动坐标系  $\{O'\}$  可以看作固定坐标系  $\{O\}$  沿  $z$  轴正向移动得到。固定坐标系  $\{O\}$  的各坐标轴与支链坐标系各坐标轴平行且方向相同。

以固定坐标系  $\{O\}$  为参考,  $\mathcal{S}_{11}^r$  和  $\mathcal{S}_{31}^r$  约束运动平台沿  $y$  轴移动自由度;  $\mathcal{S}_{21}^r$  约束运动平台沿  $x$  轴移动自由度;  $\mathcal{S}_{22}^r$  和  $\mathcal{S}_{32}^r$  约束运动平台绕  $z$  轴转动自由度, 因此机构阶数为 6, 存在 2 个冗余约束, 无局部自由度。根据修正的 Kutzbach-Grübler 公式, 机构的自由度为:

$$F = \lambda(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu - \zeta = 3 \quad (7)$$

式中:  $F$  为机构的自由度;  $\lambda$  为机构的阶数;  $n$  为构件数目;  $g$  为运动副数目;  $f_i$  为第  $i$  个运动副的自由度数;  $\nu$  为去除公共约束后的冗余约束数目;  $\zeta$  为机构中存在的局部自由度。

运动平台具有沿  $z$  轴移动和绕  $x$  轴,  $y$  轴转动自由度。

## 2 机构运动学分析

在动坐标系  $\{O'\}$  中,  $S_1$  的坐标为  $A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r; -\frac{r}{2}; 0\right)^T$ ;  $U_2$  的坐标为  $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r; -\frac{r}{2}; 0\right)^T$ ;  $U_3$  的坐标为  $A_3(0; r; 0)^T$ ; 在  $\{O\}$  坐标系中,  $R_1$  的坐标为  $B_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R; -\frac{R}{2}; h_1\right)^T$ ,  $R_2$  的坐标为  $B_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R; -\frac{R}{2}; h_2\right)^T$ ,  $R_3$  的坐标为  $B_3(0; R; h_3)^T$ 。  $r$  为  $\triangle S_1U_2U_3$  外接圆半径;  $R$  为  $R_1, R_2$  和  $R_3$  运动副中心点在  $\{O\}$  坐标系的  $Oxy$  平面投影点所组成的三角形外接圆半径;  $h_1, h_2$  和  $h_3$  为驱动副  $P_1, P_2$  和  $P_3$  在  $\{O\}$  坐标系  $z$  轴的坐标值。

1) 位置关系方程。动平台各铰点在  $\{O\}$  坐标系的矢量表示为:

$$A_i' = TA_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中:  $z$  为动平台中心点  $O'$  在  $\{O\}$  坐标系下  $z$  轴的坐标值;  $T$  为旋转变换矩阵, 表示为:

$$T = T_y T_x \quad (9)$$

$T_x$  和  $T_y$  分别为:

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{T}_y = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (11)$$

式中:  $B, \gamma$  为俯仰 (Pitch)、偏转 (Yaw) 角, 用 RPY 角表示。

杆件  $S_1R_1$  矢量为  $\mathbf{L}_1$ ,  $U_2R_2$  矢量为  $\mathbf{L}_2$ ,  $U_3R_3$  矢量为  $\mathbf{L}_3$ , 存在:

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{A}'_i - \mathbf{B}_i \quad i=1,2,3 \quad (12)$$

则:

$$L_i = \sqrt{(\mathbf{A}'_{ix} - \mathbf{B}_{ix})^2 + (\mathbf{A}'_{iy} - \mathbf{B}_{iy})^2 + (\mathbf{A}'_{iz} - \mathbf{B}_{iz})^2} \quad (13)$$

式中:  $L_i$  为第 1 支链、第 2 支链、第 3 支链杆件  $S_1R_1$ 、 $U_2R_2$  和  $U_3R_3$  的长度。

根据方程 (13) 得:

$$h_i = \mathbf{A}'_{iz} - \sqrt{L_i^2 - (\mathbf{A}'_{ix} - \mathbf{B}_{ix})^2 - (\mathbf{A}'_{iy} - \mathbf{B}_{iy})^2} \quad (14)$$

方程 (14) 为机构的位置逆解表达式。

2) 速度关系方程。方程 (14) 对时间求导, 得:

$$\mathbf{J}_{\text{inv}} \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{\text{dir}} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (15)$$

式中:  $\dot{h}_1, \dot{h}_2$  和  $\dot{h}_3$  为驱动副运动速度;  $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$  为姿态角  $\beta, \gamma$  变化率;  $\dot{z}$  为中心点  $O$  速度;  $\mathbf{J}_{\text{inv}}$  为机构速度逆 Jacobian 矩阵, 是单位阵, 即  $\mathbf{J}_{\text{inv}} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ ;  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  为机构速度正 Jacobian 矩阵, 即:

$$\mathbf{J}_{\text{dir}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} & \frac{\partial h_1}{\partial \gamma} & \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \beta} & \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \\ \frac{\partial h_3}{\partial \beta} & \frac{\partial h_3}{\partial \gamma} & \frac{\partial h_3}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (16)$$

3) 加速度关系方程。速度关系方程 (15) 对时间求导, 得:

$$\mathbf{J}_{\text{inv}} \begin{pmatrix} \ddot{h}_1 \\ \ddot{h}_2 \\ \ddot{h}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{J}_{\text{dir}} \begin{pmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda} \quad (17)$$

式中:  $\ddot{h}_1, \ddot{h}_2$  和  $\ddot{h}_3$  为驱动副加速度;  $\ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$  为  $\dot{\beta}, \dot{\gamma}$  的变化率。

机构输入、输出加速度关系方程见式 (17),  $\boldsymbol{\lambda}$  表达式为:

$$\boldsymbol{\lambda} = \dot{\mathbf{J}}_{\text{dir}} \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{z} \end{pmatrix} - \dot{\mathbf{J}}_{\text{inv}} \begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

式中:  $\dot{\mathbf{J}}_{\text{dir}}$  和  $\dot{\mathbf{J}}_{\text{inv}}$  为  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  和  $\mathbf{J}_{\text{inv}}$  对时间的一阶导数。

### 3 机构奇异性分析

机构奇异位形的研究方法主要有几何法和代数

法。20 世纪 70 年代, Whitney<sup>[16]</sup>就认识到了奇异位形严重影响机器人的控制, 并提出了规避奇异方法; Diziloglu<sup>[17]</sup>和 J.Eddie Baker<sup>[18]</sup>也在同时期研究了机构的特殊位形和奇异位形。代数法根据 Jacobian 矩阵可以得到明确的奇异位形与结构参数和位姿参数的关系, 便于机构尺度参数设计。

机构的奇异位形可以根据正、逆速度 Jacobian 是否满秩判定。显然, 无论机构处于什么位姿,  $\mathbf{J}_{\text{inv}}$  满秩, 只需要分析  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  是否满秩, 等价于  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  的行列式是否为 0。由于机构输入、输出耦合,  $\mathbf{J}_{\text{dir}}$  及其行列式复杂, 难以直接判断, 因此将奇异性判断问题转化多元函数极值问题。

令:

$$f(\mathbf{X}) = |\mathbf{J}_{\text{dir}}| \quad (19)$$

其中:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ z \end{pmatrix}$$

受 S 副和 U 副结构限制, P 副也有运动范围限制, 动平台姿态和位置参数满足:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{3} \\ 0.5 \leq z \leq 2 \\ -\frac{\pi}{3} \leq \beta \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (20)$$

文中所有的角度单位为 rad, 位置单位为 m。利用 Matlab 的无约束优化函数 fmincon 编程计算, 其中式 (19) 为目标函数, 杆长  $L_1, L_2$  和  $L_3$  取 1.2,  $R$  取 1,  $r$  取 0.5。在式 (20) 的姿态角约束范围内求解得:

$$\min\{f(\mathbf{X})\} = 5.1629 \times 10^{-9} > 0 \quad (21)$$

未发现机构存在奇异位形。

### 4 机构工作空间分析

机构工作空间受运动副运动范围、杆件长度、杆件干涉和奇异位形约束。2PRU/PRS 并联机构工作空间影响因素包括驱动副移动范围、S 副和 U 副运动范围 (约束姿态角范围), 除式 (20) 外, 机构不等式约束方程还包括:

$$\begin{cases} -0.5 \leq h_1 \leq 0.5 \\ -0.5 \leq h_2 \leq 0.5 \\ -0.5 \leq h_3 \leq 0.5 \end{cases} \quad (22)$$

杆件长度为等式约束, 表示为:

$$\begin{cases} L_1 = 1.2 \\ L_2 = 1.2 \\ L_3 = 1.2 \end{cases} \quad (23)$$

机构工作空间计算结果见图 4。

机构工作空间姿态角截面见图 5。

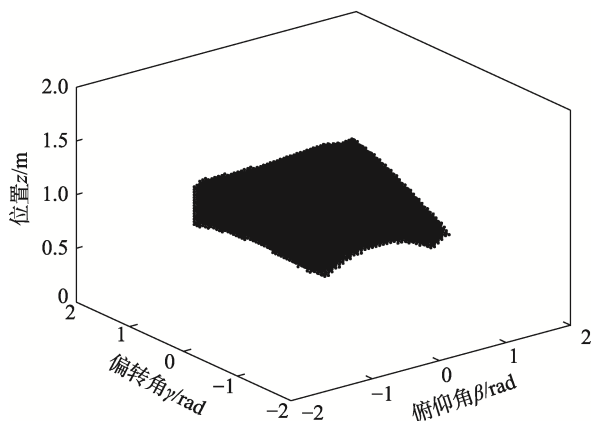


图4 运动平台中心点工作空间

Fig.4 Workspace of center point on moving platform

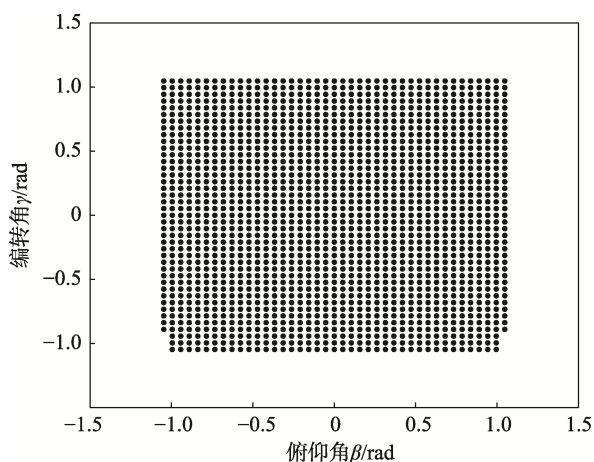


图5 β-γ 截面

Fig.5 Section of β-γ

计算结果显示,运动平台中心  $O'$  位置变化范围  $z \in [0.6, 1.59]$ ; 运动平台姿态角范围  $\beta \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ ,  $\gamma \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ 。

## 5 机构运动学数值算例

### 5.1 位置正解计算

机构输入、输出位姿关系耦合,不易推导出位置正解的解析表达式,因此采用数值法求解。采用1995年提出的粒子群优化(PSO)算法可以处理高维非线性问题<sup>[19]</sup>。文献[20—21]指出,前期较大的  $w$  有利于提高算法的探索能力以得到合适的种子,后期较小的  $w$  倾向于局部搜索。提出一种动态变权重的 PSO 算法,  $w$  的动态变化值定义为:

$$w = w_{\min} + (k_{\max} - k)(w_{\max} - w_{\min}) / k_{\max} \quad (24)$$

式中:  $w_{\min}$  为最小权重因子,一般为[0.2,0.5];  $w_{\max}$  为最大权重因子,一般为[0.8,1];  $k_{\max}$  为最大

迭代次数;  $k$  为当前迭代次数。

式(24)中的  $w_{\min}$  和  $w_{\max}$  采用线性动态变化,即:

$$w_{\min} = 0.2 + \frac{0.5 - 0.2}{k_{\max}} k \quad (25)$$

$$w_{\max} = 1 - \frac{1 - 0.8}{k_{\max}} k \quad (26)$$

建立适应度评价函数

$$fitness(\beta, \gamma, z) = \sum_{i=1}^3 \left| \sqrt{(A'_{ix} - B_{ix})^2 + (A'_{iy} - B_{iy})^2 + (A'_{iz} - B_{iz})^2} - L_i \right| \quad (27)$$

式(27)中的尺度参数与机构工作空间分析中尺度参数相同,运用改进的 PSO 算法求  $\min\{fitness(\beta, \gamma, z)\}$  时的  $X = (\beta; \gamma; z)^T$  即为位置正解。为了提高求解精度, PSO 算法的初值再用拟牛顿(Broyden)法进行迭代计算<sup>[22]</sup>,结果作为位置正解终值。在工作空间内选取5组姿态角进行对比,见表1。

### 5.2 速度、加速度计算

在工作空间内,机构运动平台中心点从位置  $F\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{5}; 0.9\right]^T$  移动到位置  $E\left[\frac{\pi}{5}; \frac{\pi}{6}; 1.1\right]^T$ 。要求运动时间为5s,机构的运动初始和终止时刻的速度和加速度均为零,采用五次多项式轨迹,从初始时刻  $t_0$  到终止时刻  $t_f$  坐标值的位姿运动方程为:

$$P = s_0 + s_1 t + s_2 t^2 + s_3 t^3 + s_4 t^4 + s_5 t^5 \quad (28)$$

通过位姿、(角)速度和(角)加速度条件,可以得到:

$$\begin{cases} P(t_0) = s_0 \\ P(t_f) = s_0 + s_1 t_f + s_2 t_f^2 + s_3 t_f^3 + s_4 t_f^4 + s_5 t_f^5 \\ \dot{P}(t_0) = s_1 \\ \dot{P}(t_f) = s_1 + 2s_2 t_f + 3s_3 t_f^2 + 4s_4 t_f^3 + 5s_5 t_f^4 \\ \ddot{P}(t_0) = 2s_2 \\ \ddot{P}(t_f) = 2s_2 + 6s_3 t_f + 12s_4 t_f^2 + 20s_5 t_f^3 \end{cases} \quad (29)$$

把  $F$  到  $H$  点的运动学参数条件代入式(29),求得运动平台中心点轨迹方程为:

$$\begin{cases} \beta = 0.78539816339745 - 0.01256637061436t^3 + 0.00376991118431t^4 - 0.00030159289474t^5 \\ \gamma = 0.62831853071796 - 0.00837758040957t^3 + 0.00251327412287t^4 - 0.00020106192983t^5 \\ z = 0.9 + 0.016t^3 - 0.0048t^4 + 0.000384t^5 \end{cases} \quad t \in [0, 5] \quad (30)$$

将式(30)代入式(14)、式(15)和式(17)分别得到驱动副  $h_1$ ,  $h_2$  和  $h_3$  的位置、速度和加速度变化曲线,见图6。

表 1 动平台位姿计算结果  
Tab.1 Results of position and attitude on moving platform

| 理论值/数值解     | 位姿 | $\beta/\text{rad}$ | $\gamma/\text{rad}$ | $z/\text{m}$ |
|-------------|----|--------------------|---------------------|--------------|
| 运动平台实际位姿    | 1  | $\pi/4$            | $\pi/5$             | 0.9          |
|             | 2  | $\pi/5$            | $\pi/6$             | 1.1          |
|             | 3  | $-\pi/4$           | $\pi/5$             | 1            |
|             | 4  | $\pi/5$            | $-\pi/6$            | 1.05         |
|             | 5  | $\pi/5$            | $\pi/6$             | 0.8          |
| PSO 算法计算值   | 1  | 0.7836             | 0.6280              | -0.8999      |
|             | 2  | 0.6279             | 0.5231              | 1.1001       |
|             | 3  | -0.7841            | 0.6287              | 1.0000       |
|             | 4  | 0.6288             | -0.5229             | 1.0503       |
|             | 5  | 0.6290             | 0.5229              | 0.8000       |
| Broyden 迭代值 | 1  | 0.7854             | 0.6283              | 0.9000       |
|             | 2  | 0.6283             | 0.5236              | 1.1000       |
|             | 3  | -0.7854            | 0.6283              | 1.0000       |
|             | 4  | 0.6283             | -0.5236             | 1.0500       |
|             | 5  | 0.6283             | 0.5236              | 0.8000       |

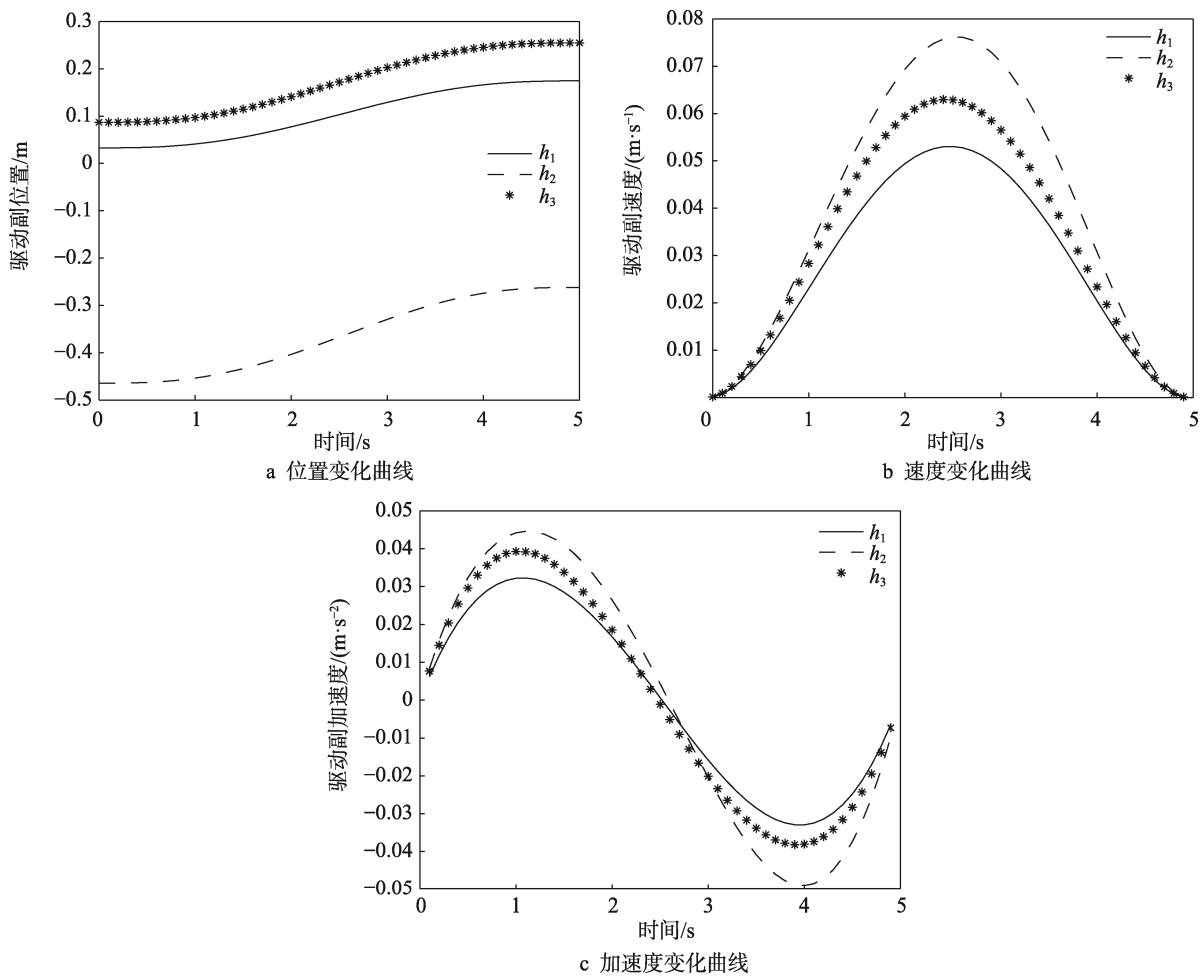


图 6 驱动副运动学变化曲线  
Fig.6 Kinematics curve of driving pairs

根据图 6a 可知,随着运动平台位姿变化,所有驱动副向  $z$  轴正向移动;图 6b 表明,运动过程中驱动副  $P_2$  运动速度最快, $P_1$  运动速度低于  $P_2$  和  $P_3$ ;图 6c 显示,驱动副加速度变化趋势为先增加后减小,再增加。驱动副  $P_2$  运动加速度变化最大, $P_1$  最小。驱动副速度和加速度变化平稳。

## 6 结语

利用螺旋理论和 Kutzbach-Grübler 公式证明了 2PRU/PRS 并联机构为 2R1T 运动模式机构。

分析了机构输入、输出参数,建立了机构输入、输出运动学关系方程。通过分析机构速度 Jacobian 矩阵,未发现机构存在奇异位形。建立了机构工作空间约束方程,得到了机构运动平台姿态角和中心点位置工作范围,姿态角工作空间大。

建立了机构适应度评价函数,采用 PSO 算法和迭代法相结合的求解方法,得到了机构高精度位置正解。采用五次多项式进行轨迹规划,得到了机构驱动副运动学变化规律。

该新型机构满足食品行业的抓取和包装生产线需要大工作空间的要求,为机构的应用和动力学及控制理论分析奠定了基础。

### 参考文献:

- [1] CLAVEL R. Dispositif Pour Le Deplacement Et Le Positionnement Dun Element Dans L'espace: CN, 1985005348856[P]. 1991-07-17.
- [2] CLAVEL R. Device for the Movement and Positioning of an Element in Space: US, 4976582[P]. 1990-12-11.
- [3] ZHAO Y. Dimensional Synthesis of a Three Translational Degrees of Freedom Parallel Robot while Considering Kinematic Anisotropic Property[J]. Robotics and Computer-integrated Manufacturing, 2013, 29(1): 169—179.
- [4] 葛正浩,白鹏虞,韩小虎,等. 正交 3 自由度平动并联机构平台的运动学分析[J]. 机械传动, 2020, 44(2): 80—87.  
GE Zheng-hao, BAI Peng-yu, HAN Xiao-hu. Kinematics Analysis on 3-DOF Orthogonal Translational Parallel Mechanism Platform[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2020, 44(2): 80—87.
- [5] 孙驰宇,沈惠平,王一熙,等. 零耦合度部分运动解耦三平移并联机构刚度建模与分析[J/OL]. 农业机械学报: 1—14[2020-05-02]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1964.S.20200316.1107.006.html>.  
SUN Chi-yu, SHEN Hui-ping, WANG Yi-xi, et al. Rigidity Modeling and Analysis of DOF Translational Parallel Mechanism in Motion Decoupling of Zero Coupling Part[J/OL]. Journal of Agricultural Machinery, 2020: 1—14[2020-05-02]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1964.S.20200316.1107.006.html>.
- [6] 沈惠平,曾博雄,尤晶晶,等. 具有解析式位置正解的三平移并联机构设计与分析[J]. 农业机械学报, 2020, 51(2): 383—391.  
SHEN Hui-ping, ZENG Bo-xiong, YOU Jing-jing, et al. Topology Design and Analysis of Three-translation Parallel Mechanism with Analytical Direct Position Solutions[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(2): 383—391.
- [7] 李秦川,柴馨雪,陈巧红. 两转—移三自由度并联机构研究进展[J]. 科学通报, 2017, 62(14): 1507—1519.  
LI Qin-chuan, CHAI Xin-xue, CHEN Qiao-hong. Review on 2R1T 3-DOF Parallel Mechanisms[J]. Chinese Science Bulletin, 2017, 62(14): 1507—1519.
- [8] LI Qin-chuan, HERVÉ J M. Type Synthesis of 3-DOF RPR-equivalent Parallel Mechanisms[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(6): 1333—1343.
- [9] 侯雨雷,汪毅,李明洋,等. 一种含间隙两转动—移动解耦并联机构混沌现象辨识[J]. 中国机械工程, 2015, 26(13): 1759—1766.  
HOU Yu-lei, WANG Yi, LI Ming-yang, et al. Chaos Identification of Two Rotational and One Translational Decoupled Parallel Mechanism Concerning Clearance[J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(13): 1759—1766.
- [10] 刘伟,刘宏昭. 具有 2R1T 和 3R 运动模式的并联机构综合[J]. 机械工程学报, 2019, 55(3): 53—63.  
LIU Wei, LIU Hong-zhao. Type Synthesis of 3-DOF Parallel Mechanism with both 2R1T and 3R Motion Mode[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(3): 53—63.
- [11] 汪满新,黄田. 1T2R 3 自由度并联机构拓扑结构综合[J]. 机械工程学报, 2015, 51(17): 1—7.  
WANG Man-xin, HUANG Tian. Type Synthesis of 1T2R 3-DOF Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(17): 1—7.
- [12] 何延,刘宏昭. 一种三角化解耦 1T2R 并联机构的型综合与运动学分析[J]. 机械科学与技术, 2019, 38(11): 1669—1675.  
HE Yan, LIU Hong-zhao. Type Synthesis and Kinematics Analysis of a Triangle Decoupled 1T2R Parallel Mechanism[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2019, 38(11): 1669—1675.
- [13] SUN Tao, HUO Xin-ming. Type Synthesis of 1T2R Parallel Mechanisms with Parasitic Motions[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 128: 412—428.
- [14] HUANG Tian, DONG Cheng-lin, LIU Hai-tao, et al. A Simple and Visually Orientated Approach for Type Synthesis of Overconstrained 1T2R Parallel Mechanism

- isms[J]. *Robotica*, 2018, 37(7): 1161—1173.
- [15] JOSÉ C, MARINA V, ÁNGEL V, et al. Hybrid Force/Position Control for a 3-Dof 1T2R Parallel Robot: Implementation, Simulations and Experiments[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2016, 44(1/2): 16—31.
- [16] WHITNEY D E. The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control Trans, ASME*, 1972, 94(4): 303—330.
- [17] DIZIOGLU B. Theory and Practice of Spatial Mechanisms with Special Position of the Axes[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1978, 13(2): 139—153.
- [18] BAKER J E. Limit Position of Spatial Linkages Via Connectivity Sum Reduction[J]. *Journal of Mechanical Design Transactions of ASME*, 1979, 101(4): 504—507.
- [19] KENNEDY J, EBERHART R C. Particle Swarm Optimization[C]// *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Piscataway, NJ, USA, 1995: 1942—1948.
- [20] SHI Y H, EBERHART R C. A Modified Particle Swarm Optimizer[C]// *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*, Piscataway, USA, 1998: 69—73.
- [21] 汪霖, 曹建福, 韩崇照. 基于粒子群优化的机器人多传感器自目标标定[J]. *机器人*, 2009, 31(5): 391—396.
- WANG Lin, CAO Jian-fu, HAN Chong-zhao. A Robot Multi-sensor Self-calibration Method Based on Particle Swarm Optimization[J]. *Robot*, 2009, 31(5): 391—396.
- [22] 叶鹏达, 尤晶晶, 沈惠平, 等. 具有解析式正解的 Stewart 衍生型并联机构的位移输入协调关系[J]. *光学精密工程*, 2020, 28(1): 151—165.
- YE Peng-da, YOU Jing-jing, SHEN Hui-ping, et al. Displacement Input Coordination of Stewart Derivative Parallel Mechanism with Analytical Positive Solution[J]. *Editorial Office of Optics and Precision Engineering*, 2020, 28(1): 151—165.