缓冲与隔振

一种非高斯随机振动过程数值模拟方法

杨喆，朱大鹏，高全福
（兰州交通大学，兰州 730070）

摘要：目的 考虑真实随机振动的非高斯特性，提出一种根据已知信息生成与其相符的非高斯随机振动过程的数值模拟方法。**方法** 基于均值、方差、偏斜度、峭度及功率谱密度函数（或自相关函数）等约束条件，对非高斯随机振动进行模拟。根据功率谱获取非高斯过程的自相关矩阵；通过 Hermite 多项式的正交性质和多项式混沌展开方法推导出的公式，构造满足标准正态分布随机过程的协方差矩阵，并对其进行谱分解和主成分分析；最后，利用 Karhunen-Loeve 展开和多项式混沌展开来表示所模拟的非高斯振动过程。**结果** 随着采样点个数的增加，实测数据与模拟数据之间的误差越来越小，该方法具有较好的模拟精度。**结论** 应用多项式混沌展开、Karhunen-Loeve 展开以及蒙特卡洛等方法，可生成非高斯随机振动过程，并得到准确有效的各项统计参数模拟值。

关键词：非高斯随机振动；多项式混沌展开；Karhunen-Loeve 展开；蒙特卡洛方法
中图分类号：TB123　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1001-3563(2019)15-0048-06
DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.15.008

A Numerical Simulation Method for Non-Gaussian Random Vibration Process

YANG Zhe, ZHU Da-peng, GAO Quan-fu
(Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

ABSTRACT: The work aims to propose an appropriate numerical simulation method for non-Gaussian random vibration processes generated according to the known information when considering non-Gaussian property of the actual random vibration. Based on such constraint conditions as mean, variance, skewness, kurtosis and PSD function (or autocorrelation function), the non-Gaussian random vibration was simulated. The autocorrelation matrix of the non-Gaussian process was obtained from the PSD. Through the formula derived from Hermite polynomial orthogonal property and polynomial chaos expansion, the covariance matrix of the standard normal distribution random process was constructed, and the spectral decomposition and principal component analysis were also performed. Finally, the simulated non-Gaussian vibration process was represented by Karhunen-Loeve expansion and polynomial chaos expansion. As the number of sampling points increased, the error between measured data and simulated data became smaller and smaller, besides, the proposed method had good simulation accuracy. Combined with polynomial chaos expansion, Karhunen-Loeve expansion and Monte Carlo method, the non-Gaussian random vibration process can be generated and accurate and effective simulation values of various statistical parameters can be obtained.

KEY WORDS: non-Gaussian random vibration; polynomial chaos expansion; Karhunen-Loeve expansion; Monte Carlo method

收稿日期：2019-04-11
基金项目：国家自然科学基金（51765028）。
作者简介：杨喆（1994—），男，兰州交通大学硕士生，主攻非高斯随机过程模拟、车辆疲劳寿命分析。
通信作者：朱大鹏（1977—），男，博士，兰州交通大学教授，主要研究方向为运输包装、包装动力学、运输安全。

随机振动现象普遍存在于工程与自然界中，比如汽车在凹凸不平路面上行驶时受到的影响、阵风作用下结构的响应以及地震对地面建筑物的作用等，这些都是由随机激励引起的随机振动现象。随机振动过程虽然无法用具体函数形式进行描述，但却可以通过寻找其统计规律来解决相关问题，按照幅值概率分布特征可以将随机振动过程分为高斯和非高斯 2 种情况。目前，对于高斯过程的研究已经积累了大量的理论方法和经验结论，因此工程中遇到的随机振动问题往往都会采用等效高斯方法来对其进行分析处理[1]，然而实际中大部分振动过程中具有明显的非高斯特性[2]，这就导致模拟获得的随机振动过程与实际振动过程之间存在明显的差异。鉴于非高斯随机振动过程的数值模拟具有重要理论意义和工程应用价值，国内外许多研究者都对此进行了深入分析并提出了一些有效的模拟方法。

Steinwolf[3]根据特定 PSD（功率谱密度函数）条件结合调制谐波相位法模拟生成了非高斯随机激励，此方法具有较高的模拟精度及计算效率；Rouillard[4]深入研究了车辆振动环境下的非高斯特性，并提出利用多个方差不同的高斯随机振动过程生成非高斯随机振动过程的模拟方法；Rizzi[5]等依据时间序列特征并在统计分析了大量实际环境中非高斯振动信号后，将非高斯过程分为平稳和非平稳 2 种情况，并指出大多振动信号的非高斯性是由短时非平稳性造成的；Seong 和 Peterka[6—7]根据指数峰值模型生成非高斯随机振动过程的相关数据提取了相位信息，同时通过 PSD 曲线提取了幅值信息，最后模拟得到了非高斯风压时程；蒋瑜[8]研究了基于幅值调整与相位重构的模拟方法并由此生成了具有指定统计特征参数和频谱特性的超高斯随机振动过程，其间通过多次迭代取得了与偏斜度、峭度目标值近似的模拟值；夏静等[9]采用 Weibull 和 Beta 分布构造调制信号，在窗函数幅值调制法的基础上利用自功率谱密度及峭度生成了非高斯随机信号，最后分析并确立了这 2 种信号在非高斯条件下峭度的取值范围；黄铭枫等[10]根据风洞试验取得的数据样本，提出利用四参数风压谱模型、多点谐波叠加法及 Hermite 变换关系模拟非高斯随机风压场，并通过引入反映其特征的误差控制参数来修正模拟结果。

上述非高斯模拟方法大都存在计算过程较为繁琐（迭代算法需要进行多次反复迭代以逼近目标值）及模拟精度和计算效率不高等问题。基于此，文中拟提出一种非高斯随机振动过程的数值模拟方法，即根据特征统计参数（均值、方差、偏斜度及峭度）和 PSD 函数，结合多项式混沌展开（Polynomial Chaos Expansion）和 Karhunen-Loeve 展开的相关公式，再通过蒙特卡洛方法（Monte Carlo Method）生成随机数并将其代入到上述公式，模拟得到非高斯振动过程。以车辆在不平路面上行驶时的垂向振动过程为例介绍分析的具体步骤。

1　非高斯随机振动

高斯随机振动过程只需要 PSD 函数就可以进行描述，但对于非高斯振动来说，其概率密度分布具有明显的非对称现象，若仅用 PSD 来表示，将会造成模拟振动与实际振动之间存在较大误差。

为了更好地模拟非高斯随机振动 $F(t)$（t 为时间）并保证其准确性，除 PSD、均值 μ_F 以及方差 σ_F^2 外，还需要引入一些新的特征统计参数，即偏斜度 S_F 和峭度 K_F 来反映非高斯随机过程的分布情况[11—13]。由文献[11—12]可知 S_F 和 K_F 的计算公式如下所示。

$$S_{\mathrm{F}}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{F_j-\mu_{\mathrm{F}}}{\sigma_{\mathrm{F}}}\right)^3=\frac{m_3}{{\sigma_{\mathrm{F}}}^3} \tag{1}$$

$$K_{\mathrm{F}}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{F_j-\mu_{\mathrm{F}}}{\sigma_{\mathrm{F}}}\right)^4=\frac{m_4}{{\sigma_{\mathrm{F}}}^4} \tag{2}$$

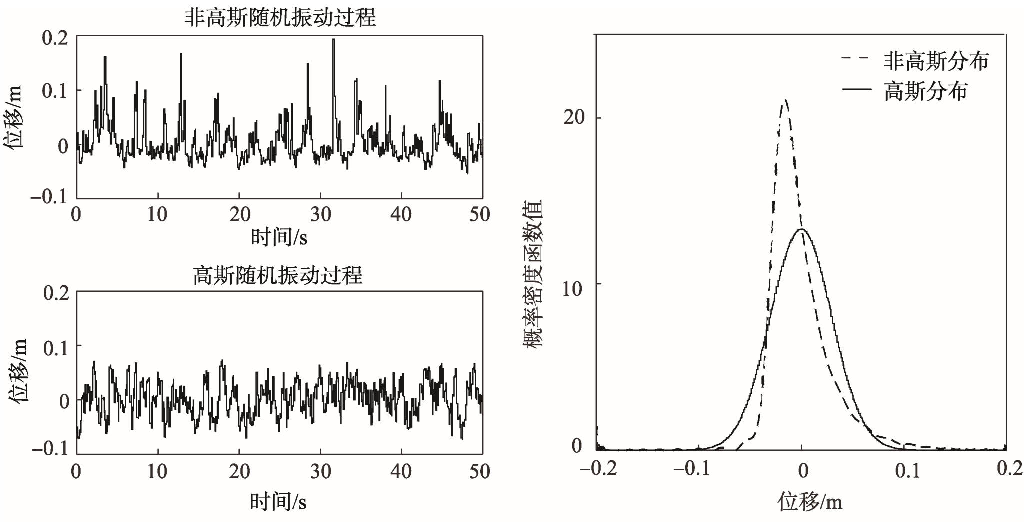
式中：m_3，m_4 分别为随机过程 $F(t)$的 3 阶和 4 阶中心距。

非高斯与高斯过程的时域对比与概率分布对比见图 1，图1a 为同等均值与方差条件下的一对高斯与非高斯随机过程的时域对比图，图1b 为对应的概率密度函数曲线。对于高斯随机振动，只需符合 S_F=0 及 K_F=3 这 2 个条件即可，其概率密度分布函数左右对称；而对于非高斯随机过程来说，其概率分布图形按照 S_F 的正负情况可分为右偏分布和左偏分布，若按照 K_F 与 3 的大小关系又可将其分为超高斯分布和亚高斯分布[12—13]。

2　非高斯过程的数值模拟算法

若已知非高斯过程 $F(t)$中的 PSD、μ_F、σ_F^2、S_F 以及 K_F，可通过多项式混沌展开、Karhunen-Loeve 展开以及蒙特卡洛等方法对其进行表示。首先，根据功率谱（自相关函数）得到 $F(t)$的自相关矩阵 $\boldsymbol{C}_{FF}$；接下来根据 Hermite 多项式正交性质等得到反映 $F(t)$与标准正态随机过程 $\xi(t)$关系的表达式，构造出 $\xi(t)$的自相关矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$，对其进行谱分解和主成分分析；最后，利用 Karhunen-Loeve 展开和多项式混沌展开的相应式表示 $F(t)$。以下是非高斯随机振动过程数值模拟算法的具体步骤。

随机过程 $F(t)$的自相关函数 ρ_{FF} 可以通过对其功率谱密度函数进行逆傅立叶变换获得，振动过程的时间区间为$[0,T]$，设步长为 Δt，$n=T/\Delta t+1$ 是将此区间等分成（n-1）份后离散点的个数。接下来构造出一个 $n\times n$ 的自相关矩阵 $\boldsymbol{C}_{FF}$，其中，任意一个元素都满足 $\boldsymbol{C}_{FF}(t_i,t_j)=\rho_{FF}(\tau)$，自变量 $\tau=|t_i-t_j|=\Delta t|i-j|$。假定 $\xi(t)$



a 时域对比　　b 概率分布对比

图 1　非高斯与高斯过程的时域对比与概率分布对比

Fig.1 Time domain comparison and probability distribution comparison of non-Gaussian and Gaussian processes

的协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}=[\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}(t_i,t_j)]$，$i,j=1,2\cdots n$，对方阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 进行谱分解，为了避免特征值中出现复数选用文献[14]中的奇异值分解法。

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}=\boldsymbol{Q\Sigma Q}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)$，其中 λ_i 为矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 的特征值，$i=1,2\cdots n$；$\boldsymbol{Q}=[Q_1,Q_2\cdots Q_n]$是酉矩阵，满足 $\boldsymbol{QQ}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$ 为单位阵；T 为矩阵转置符号，$\boldsymbol{Q}_i$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 的特征向量，$i=1,2\cdots n$。根据文献[15—16]，$\xi(t)$可用 Karhunen-Loeve 展开进行表示。

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\lambda_i}\boldsymbol{Q}_i(t)\xi_i \tag{4}$$

式中：ξ_i 为标准正态随机变量，$i=1,2\cdots n$，可通过蒙特卡洛方法生成。为了减少计算量，提高运算效率，对矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 应用文献[16]提出的主成分分析法确定所需特征值与特征向量的个数，即计算出满足下列条件时的 r 值。

$$\left(\sum\nolimits_{i=1}^{r}\lambda_i\boldsymbol{Q}_i^2(t)\right)\Big/\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{Q}_i^2(t)\right)\geq p \tag{5}$$

式中：p 为阈值且 $0<p\leq 1$，（4）式中 ξ_i 的个数也相应减少为 r。根据文献[17]，任意随机变量 F 都可通过一维正交标准正态随机变量 ξ 的 Hermite 多项式 H_k 的组合形式来表示。

$$F=\sum b_k H_k(\xi)= b_0+b_1\xi+b_2(\xi^2-1)+b_3(\xi^3-3\xi)+\cdots \tag{6}$$

式中：b_k（$k=0,1,2,3\cdots$）为多项式混沌展开中的各项系数。$H_k(\xi)$在概率论中的定义如文献[18]所述。

$$H_k(\xi)=(-1)^k \mathrm{e}^{\frac{\xi^2}{2}}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) \tag{7}$$

式中：$\mathrm{d}^k/\mathrm{d}\xi^k\,(\cdot)$为 k 阶导数。若要表示随机过程 $F(t)$，式(6)可以拓展为：

$$F(t)=\sum b_k(t)H_k(t)=b_0(t)+b_1(t)\xi(t)+ b_2(t)(\xi(t)^2-1)+b_3(t)(\xi(t)^3-3\xi(t))+\cdots \tag{8}$$

随机过程分为平稳和非平稳 2 种情况，设定式（8）中的 $F(t)$为平稳随机过程，则系数 $b_k(t)$为常量，不会随时间变化而发生变化。根据 Hermite 多项式的正交性质及式(8)，可推导出 $F(t)$关于 t_i 和 t_j 的协方差。

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{FF}}(t_i,t_j)=\sum_k b_k(t_i)b_k(t_j)\cdot(k!)\cdot(E[\xi(t_i)\xi(t_j)])^k \tag{9}$$

式中：$E[\xi(t_i)\xi(t_j)]=\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}(t_i,t_j)$，$i,j=1,2\cdots n$，由此可以得到式（3）中 $\xi(t)$的协方差矩阵。根据 H_k 的正交性质以及 ξ 的相关性质可以得到以下结论。

1）若 m 是奇数，则 $E(\xi^m)=0$。

2）若 m 是偶数，则 $E(\xi^0)=E(\xi^2)=1$。

3）当 $k\geqslant 2$ 时，H_k 的均值为零。

根据式（1—2），（6—8）和 $F(t)$的前 4 阶中心矩计算公式推导得到：

$$\mu_{\mathrm{F}}=E(F)=b_0=g_1(b_0,b_1,b_2,b_3) \tag{10}$$

$$E[(F-\mu_{\mathrm{F}})^2]={b_1}^2+2{b_2}^2+6{b_3}^2=g_2(b_0,b_1,b_2,b_3) \tag{11}$$

$$E[(F-\mu_{\mathrm{F}})^3]=6{b_1}^2b_2+8{b_2}^3+36b_1b_2b_3+ 108b_2{b_3}^2=g_3(b_0,b_1,b_2,b_3) \tag{12}$$

$$E[(F-\mu_{\mathrm{F}})^4]=3{b_1}^4+60{b_2}^4+3348{b_3}^4+60{b_1}^2{b_2}^2+ 252{b_1}^2{b_3}^2+576b_1{b_2}^2b_3+1296b_1{b_3}^3+ 2232{b_2}^2{b_3}^2=g_4(b_0,b_1,b_2,b_3) \tag{13}$$

给定特征统计参数，并令 $gg_u(b_0,b_1,b_2,b_3)$，$u=1,2,3,4$，分别由式（14—17）表示。

$$gg_1(b_0,b_1,b_2,b_3)=g_1(b_0,b_1,b_2,b_3)-\mu_{\mathrm{F}} \tag{14}$$

$$gg_2(b_0,b_1,b_2,b_3)=g_2(b_0,b_1,b_2,b_3)-\sigma_{\mathrm{F}}^2 \tag{15}$$

$$gg_3(b_0,b_1,b_2,b_3)=g_3(b_0,b_1,b_2,b_3)-S_{\mathrm{F}}\sigma_{\mathrm{F}}^3 \tag{16}$$

$$gg_4(b_0,b_1,b_2,b_3)=g_4(b_0,b_1,b_2,b_3)-K_{\mathrm{F}}\sigma_{\mathrm{F}}^4 \tag{17}$$

随后构造最优化模型并利用模拟退火算法或其他全局优化方法计算出 b_0，b_1，b_2，b_3 的值。

$$f=\min_{b_0,b_1,b_2,b_3}\sum_{u=1}^{4}{gg_u}^2(b_0,b_1,b_2,b_3) \tag{18}$$

非线性目标函数 f 中存在着大量的极小值点，若采用传统确定性优化算法来寻找其最小值，会很容易陷入局部最优解的陷阱。模拟退火算法（Simulated Annealing Algorithm）作为蒙特卡洛迭代求解法中的一种全局优化算法，可以有效避免局部最小的发生[19]。模拟退火算法通过利用自然界中固体退火原理来求解函数最小值，在物理学中，若将固体加热到足够高的温度，再逐步降温使其冷却，那么固体内部会达到稳定的最低能态，同理，假设所要解决的优化系统是一个能量函数，利用模拟退火算法使得系统朝着能量减小的方向发展[20]。模拟退火算法会以一定概率接受系统能量较高的状态，进而不断避开局部最小，因此用该方法求得全域最优点的概率较大。

3　仿真算例及试验

公路运输是货物流通的重要方式，运输过程中由于路面不平生成随机激励，并经车辆系统传递，使包装件及其内装产品产生振动响应，继而可能造成包装件的破损，因此分析并模拟包装件流通过程中的实际振动环境，对于确保运输包装安全具有重要意义。以路况较差公路上行驶的运输汽车为研究对象，测试并选取试验中记录的一段垂向振动信号数据，得到图 2 所示的非高斯随机过程，其各项特征统计参数值分别为 $\mu_F=-0.0023$，$\sigma_F^2=0.4891$，$S_F=0.5599$，$K_F=4.2651$。

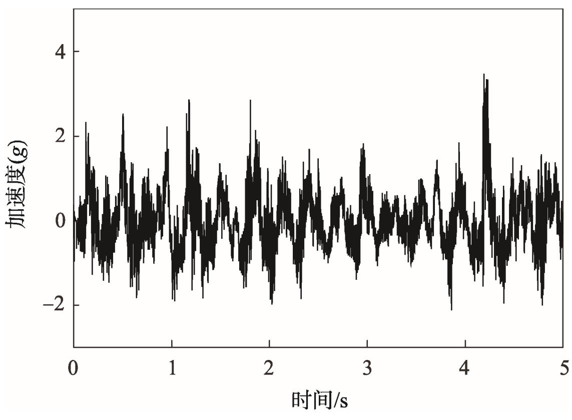


图 2　垂向随机振动过程
Fig.2 Vertical random vibration process

垂向随机振动 $F(t)$的 PSD 曲线见图 3，其自相关函数曲线见图 4。振动时间范围为 0—5 s，令其步长 Δt 为 0.001 s 进行离散化处理，根据 $F(t)$的自相关曲线获得其自相关矩阵 $\boldsymbol{C}_{FF}$。随后利用模拟退火算法得到系数 b_0，b_1，b_2，b_3 的最优解后，根据式（9）计算出标准正态随机振动过程 $\xi(t)$的协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$，其中，矩阵 $\boldsymbol{C}_{FF}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 均为 5001 行 5001 列的对称阵。

对 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 进行谱分解，计算出其特征值并从大到小进行排序，其部分分布情况见图 5，各个特征值依次记作 λ_i，i=1,2⋯5001。然后进行主成分分析，取 p 值为 0.95，根据式（5）可得 r 为 1243，将 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 中的前 r 个特征值、特征向量以及利用蒙特卡洛方法生成的标准正态随机变量 ξ_i，i=1,2⋯r 代入式（4）得到 $\xi(t)$。再利用式（8）模拟出一个平稳非高斯随机振动的时域信号，见图 6。对比图 6 与图 2 可以看出，在均值、方差、偏斜度、峭度以及功率谱（或自相关函数）等约束条件下，利用多项式混沌展开、Karhunen-Loeve

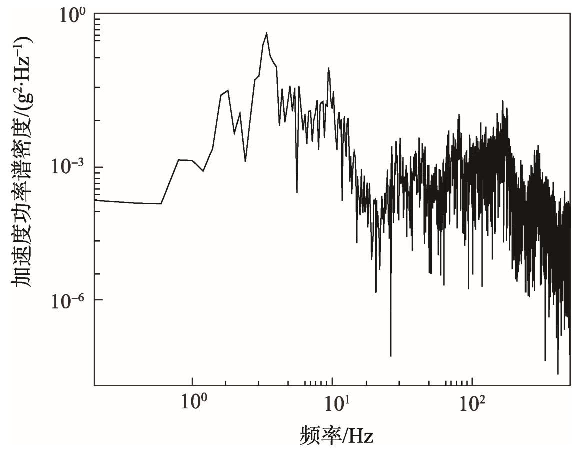


图 3　垂向随机振动的 PSD 曲线
Fig.3 PSD curve of vertical random vibration

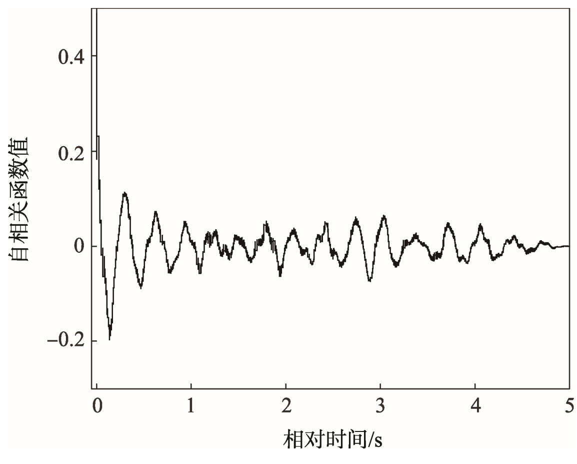


图 4　垂向随机振动的自相关曲线
Fig.4 ACF curve of vertical random vibration

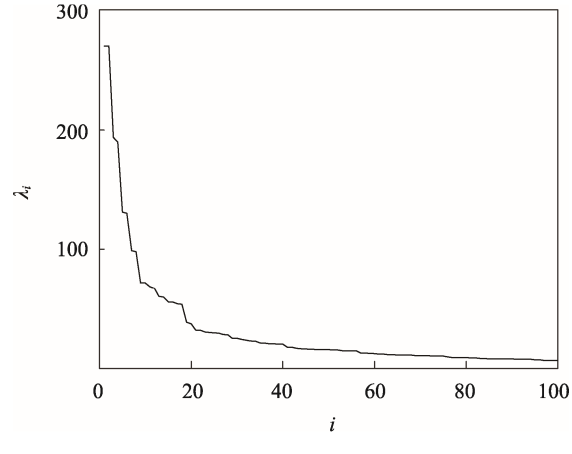


图 5　协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$ 的特征值
Fig.5 Eigenvalues of covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\xi\xi}$

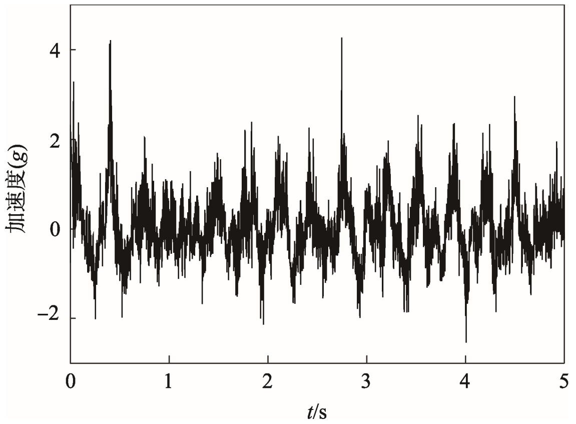


图 6 模拟非高斯随机振动
Fig.6 Simulated non-Gaussian random vibration

展开和蒙特卡洛方法模拟得到的非高斯随机振动信号与实测得到的振动信号较为相似。

利用蒙特卡洛方法选取采样点且其个数分别为 5000，50 000，100 000 以及 200 000 时，对非高斯振动进行分析计算后获取的统计参数模拟值见表 1，由表 1 可知，随着采样点数量的增加，各项特征统计参数的实际值与模拟值之间的误差越来越小。

表 1 非高斯过程的特征统计参数分析
Tab.1 Analysis of characteristic statistical parameters of non-Gaussian process

采样点数量	均值	方差	偏斜度	峭度
5000	−0.0013	0.4526	0.5189	3.9319
50 000	−0.0019	0.4647	0.5451	4.1391
100 000	−0.0019	0.4818	0.5547	4.2173
200 000	−0.0021	0.4883	0.5576	4.2635
实际值	−0.0023	0.4891	0.5599	4.2651

4 结语

文中采集了运输汽车在不平路面上行驶时的垂向振动数据，根据实测数据计算出均值、方差、偏斜度和峭度以及 PSD 函数。然后采用 Karhunen-Loeve 展开和多项式混沌展开的相关公式及蒙特卡洛方法生成了非高斯随机振动过程，并计算出相应条件下各项参数的模拟值。将该方法得出的参数值与实测数据得到的参数值进行对比，发现该方法具有较高的模拟精度。同时若建立路面激励、运输车辆及包装件系统模型，利用上述方法得到的非高斯随机激励和 4 阶龙格库塔方法对包装件的振动响应进行模拟，这将为运输包装系统的可靠性研究提供准确的分析工具。

参考文献：

[1] 程红伟. 非高斯随机载荷作用下结构疲劳寿命及可靠性研究[D]. 长沙：国防科学技术大学, 2014.
CHENG Hong-wei. Research on the Fatigue Life and Reliability of Mechanical Structure under Non-Gaussian Random Loading[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014.

[2] 李锦华，陈水生. 非高斯随机过程模拟与预测的研究进展[J]. 华东交通大学学报, 2011, 28(6): 1—6.
LI Jin-hua, CHEN Shui-sheng. Advances in Simulation and Prediction of Non-Gaussian Stochastic Processes[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2011, 28(6): 1—6.

[3] STEINWOLF A. Shaker Random Testing with Low Kurtosis: Review of the Methods and Application for Sigma Limiting[J]. Shock and Vibration, 2010, 17(2): 219—231.

[4] ROUILLARD V. Quantifying the Non-stationarity of Vehicle Vibrations with the Run Rest[J]. Packaging Technology and Science, 2014, 27(3): 203—219.

[5] RIZZI S A, PRZEKP A, TURNER T. On the Response of a Nonlinear Structure to High Kurtosis Non-Gaussian Random Loadings[R]. NASA Technical Report, 2013.

[6] SEONG S H, PETERKA J A. Computer Simulation of Non-Gaussian Multiple Wind Pressure Time Series[J]. Journal of Wind Engineering& Industrial Aerodynamics, 1997, 72(1): 95—105.

[7] SEONGS H, PETERKA J A. Digital Generation of Surface-pressure Fluctuations with Spiky Features[J]. Journal of Wind Engineering& Industrial Aerodynamics, 1998, 73(2): 181—192.

[8] 蒋瑜，陶俊勇，王得志，等. 一种新的非高斯随机振动数值模拟方法[J]. 振动与冲击, 2012, 31(19): 169—173.
JIANG Yu, TAO Jun-yong, WANG De-zhi, et al. A Novel Approach for Numerical Simulation of a Non-Gaussian Random Vibration[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(19): 169—173.

[9] 夏静，袁宏杰，徐如远. 一种新的非高斯随机振动信号的模拟方法[J]. 北京航空航天大学学报，2019, 45(2): 366—372.
XIA Jing, YUAN Hong-jie, XU Ru-yuan. A New Simulation Method of Non-Gaussian Random Vibration Signals[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(2): 366—372.

[10] 黄铭枫，孙轩涛，冯鹤，等. 基于风压谱和 Hermite 模型的大跨干煤棚风压场数值模拟研究[J]. 振动与冲击, 2018, 37(23): 111—119.
HUANG Ming-feng, SUN Xuan-tao, FENG He, et al. Numerical Simulation of Wind Pressure Field of Long-span Lattice Structures Based on Wind Pressure Spectra and Hermite Model[J]. Journal of Vibration and Shock, 2018, 37(23): 111—119.

[11] 徐飞，李传日，姜同敏，等. 非高斯随机振动的模拟方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2014, 40(9): 1239—1244.
XU Fei, LI Chuan-ri, JIANG Tong-min, et al. Simulation of Non-Gaussian Random Vibration[J]. Journal of

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 40(9): 1239—1244.

[12] 朱大鹏，李明月. 铁路非高斯随机振动的数字模拟与包装件响应分析[J]. 包装工程, 2016, 37(1): 1—5.
ZHU Da-peng, LI Ming-yue. Digital Simulation of Non-Gaussian Random Vibration of Railway and Packaging System Response Analysis[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(1): 1—5.

[13] 蒋瑜，陈循，陶俊勇，等. 指定功率谱密度、偏斜度和峭度值下的非高斯随机过程数字模拟[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(5): 1127—1130.
JIANG Yu, CHEN Xun, TAO Jun-yong, et al. Numerically Simulating Non-Gaussian Random Processes with Specified PSD, Skewness and Kurtosis[J]. Journal of System Simulation, 2006, 18(5): 1127—1130.

[14] 李继根，张新发. 矩阵分析与计算[M]. 武汉：武汉大学出版社, 2013.
LI Ji-gen, ZHANG Xin-fa. Matrix Analysis and Computation[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2013.

[15] PHOON K K, HUANG S P, QUEK S T. Simulation of Second-order Processes Using Karhunen-loeve Expansion[J]. Computers & Structures, 2002, 80(12): 1049—1060.

[16] MOURELATOS Z P, MAJCHER M, PANDEY V, et al. Time-dependent Reliability Analysis Using the Total Probability Theorem[J]. Journal of Mechanical Design, 2015, 137(3): 031405.

[17] XIU D, KARNIADAKIS G. The Wiener-askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(2): 619—644.

[18] PUIG B, AKIAN J L. Non-Gaussian Simulation Using Hermite Polynomials Expansion and Maximum Entropy Principle[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2004, 19(4): 293—305.

[19] 李春明. 优化方法[M]. 南京：东南大学出版社, 2009.
LI Chun-ming. Optimization Method[M]. Nanjing: Southeast University Press, 2009.

[20] 肖柳青，周石鹏. 随机模拟方法与应用[M]. 北京：北京大学出版社, 2014.
XIAO Liu-qing, ZHOU Shi-peng. Stochastic Simulation Methods and Its Applications[M]. Beijing: Peking University Press, 2014.