基于本构模型的发泡聚乙烯缓冲特性曲线研究

徐绍虎^{1,2},崔爽^{1,2}

(1.制造装备机构设计与控制重庆市重点实验室,重庆 400067; 2.重庆工商大学,重庆 400067)

摘要:目的 建立 EPE 本构模型,并基于本构模型研究 EPE 缓冲系数-最大应力曲线。方法 通过静态压 缩实验得到 EPE 应力-应变曲线,利用三次 Bezier 曲线拟合实验曲线,根据拟合曲线求得缓冲系数,从 而得到缓冲系数-最大应力曲线。结果 利用三次 Bezier 曲线拟合得到了 EPE 分段本构模型,基于本构 模型建立了 EPE 分段缓冲系数-最大应力曲线参数方程。本构模型、基于本构模型建立的 EPE 缓冲系数-最大应力曲线均收敛于分段点(0.3, 0.1075),且当拟合应力值为 0.4529 MPa 时,得到缓冲系数最小值 (5.0362)。结论 利用三次 Bezier 曲线拟合得到的应力-应变曲线与实验曲线有很好的拟合度,分别基 于本构模型建立的和由实验数据得到的 2 条 EPE 缓冲系数-最大应力曲线有较好的拟合度,基于三次 Bezier 曲线拟合的本构模型研究 EPE 缓冲特性曲线是可行的。

关键词:发泡聚乙烯;本构模型;三次Bezier曲线;缓冲特性曲线

中图分类号:TB484; O241.5 文献标识码:A 文章编号:1001-3563(2019)15-0011-05 DOI:10.19554/j.cnki.1001-3563.2019.15.002

Expanded Polyethylene Cushion Curve Based on Constitutive Model

XU Shao-hu^{1,2}, CUI Shuang^{1,2}

(1.Chongqing Key Laboratory of Manufacturing Equipment Mechanism Design and Control, Chongqing 400067, China;
 2.Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

ABSTRACT: The work aims to establish EPE constitutive model and study EPE buffer coefficient-maximum stress curve according to the model. The EPE stress-strain curve was obtained by static compression test. The cubic Bezier curve was used to fit the experimental curve. According to the fitting curve, the cushioning coefficient was acquired, and then the buffer coefficient-maximum stress curve was obtained. The sectioned EPE constitutive models were obtained through fitting with cubic Bezier curve. Based on the constitutive models, the parametric equations of buffer coefficient-maximum stress curves based on the constitutive models and the EPE buffer coefficient-maximum stress curves based on the constitutive models were converged to the subsection point (0.3, 0.1075). When the stress value fitted was 0.4529 MPa, the minimum value of the buffer coefficient was 5.0362. The stress-strain curve of EPE fitted by the cubic Bezier curve has good fitness with the experimental curve. The two EPE buffer coefficient-maximum stress curves based on the constitutive model and the experimental curve. The two EPE buffer coefficient-maximum stress curves based on the constitutive model and the experimental curve. The two EPE buffer coefficient-maximum stress curves based on the constitutive model and the experimental curve. The two EPE buffer coefficient-maximum stress curves based on the constitutive model and the experimental curve. The two EPE buffer coefficient-maximum stress curves based on the constitutive model and the experimental data have good fitness. It is feasible to study the EPE cushion characteristic curve based on the constitutive model fitted by cubic Bezier curve.

KEY WORDS: expanded polyethylene; constitutive model; cubic Bezier curve; cushion characteristic curve

EPE 即发泡聚乙烯,俗称珍珠棉,是一种可回收的环保材料,它是以聚乙烯树脂为主体,加入发泡剂、

交联剂和其它添加剂制成,具有密度小、易加工成型、 缓冲性能好、耐热性强等优点,常用于易碎或贵重物

收稿日期: 2019-04-28

基金项目:重庆工商大学校内科研项目(1552015,1552016)

作者简介:徐绍虎(1982-),男,硕士,重庆工商大学讲师,主要研究方向为包装材料、工艺、结构设计等。

品的缓冲包装^[1—2]。国内外学者从静态缓冲特性、动 态缓冲特性、力学行为等方面对 EPE 进行了研究。肖 雯娟^[3]等研究了常用密度的 EPE 静态缓冲特性 ;刘继 飞^[4]等研究了受内装物长期静压的 EPE 衬垫的缓冲 特性变化规律;田芃^[5]等研究了尺度效应对 EPE 静 态缓冲性能的影响;苗红涛^[6]研究了 EPE 多次冲击 下的缓冲性能;杨帅^[7]等研究了低温对 EPE 动态缓 冲性能的影响;Ruiz-Herrero^[8-9]研究了发泡比不同 的 EPE 在平压冲击下的力学行为; Tateyama 等^[10]基 于不同速率的压缩试验研究了泡沫中气体的流动对 EPE 应变率敏感性的影响;都学飞^[11]认为 EPE 载荷-位 移曲线呈正切函数特性;孙聚杰[12]等利用八次多项 式函数拟合了 EPE 本构模型。目前,还没有学者利 用三次 Bezier 曲线建立 EPE 的本构模型。三次 Bezier 曲线^[13]形状受控于特征多边形 $P_0P_1P_2P_3$ (P_i 为控制 点,i=0,1,2,3),且曲线相切于首边 P_0P_1 和末边 P₂P₃, 切点分别为首控制点 P₀和末控制点 P₃。基于 实验所建立的缓冲材料本构模型拟合参数时容易出 现不收敛的问题[14],分段拟合时更甚。采用三次 Bezier 曲线分段表示缓冲材料本构模型,不会出现拟 合参数不收敛的问题,而且基于本构模型的缓冲系数-最大应力曲线亦能收敛于分段点。文中利用三次 Bezier 曲线对实验得到的 EPE 应力-应变曲线进行分 段拟合,拟建立 EPE 的本构模型,并基于本构模型对 EPE 缓冲特性曲线进行研究。

1 三次 Bezier 曲线

如图 1 所示,三次 Bezier 曲线由多边折线(称为 特征多边形) $P_0P_1P_2P_3$ 的顶点唯一地定义,用参数方 程 P(t)来表示,表达式见式(1), P_i (*i*=0,1,2,3) 是曲线的控制点。

$$P(t) = (1-t)^{3} P_{0} + 3(1-t)^{2} t P_{1} + 3(1-t)t^{2} P_{2} + t^{3} P_{3}$$

$$0 \le t \le 1$$
(1)

若用 $P_0(\varepsilon_0, \sigma_0), P_1(\varepsilon_1', \sigma_1'), P_2(\varepsilon_2', \sigma_2')$ 和 $P_3(\varepsilon_3, \sigma_3)$ 等4个控制点分别表示 $P_i(i=0, 1, 2, 3),$ 则三次 Bezier 曲线的分量按*t*的升幂表达式见式(2)。

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + L_3 t^3 \\ \sigma(t) = M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + M_3 t^3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$
(2)

式中: L₀, L₀, L₂, L₃, M₀, M₁, M₂, M₃均为常 量, 取值见表 1。



图 1 三次贝塞尔曲线 Fig.1 Cubic Bezier curve

表 1 公式(2)中系数的取值 Tab.1 Values in equation (2)

系数	L_0	L_1	L_2	L_3
取值	${\cal E}_0$	$-3\varepsilon_0+3\varepsilon_1$ '	$3\varepsilon_0 - 6\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2'$	$-\varepsilon_0 + 3\varepsilon_1' - 3\varepsilon_2' + \varepsilon_3$
系数	M_0	M_1	M_2	M_3
取值	σ_0	$-3\sigma_0+3\sigma_1$ '	$3\sigma_0-6\sigma_1+3\sigma_2$	$-\sigma_0 + 3\sigma_1$ ' $-3\sigma_2$ ' $+ \sigma_3$

2 EPE 实验曲线拟合

根据 GB/T 8168—2008,选取温度为 23 ℃、相对 湿度为 50%的实验条件,利用万能材料试验机对厚度 为 35 mm 的 EPE 样品(密度为 0.022 g/cm³,尺寸为 100 mm×100 mm)以 12 mm/min 的速度进行静态压 缩实验,根据应变来选择取样点的数目。应变从 0 开 始,逐次增大 0.005,直至 0.8,共计 161 个取样点, 相邻取样点连成线,从而得到 EPE 的应力-应变实验 曲线,见图 2。

增大取样间隔,图 2 中的曲线各点的切线斜率一 直在增大,在 *P*₁₃(0.3,0.1075)点(即 *P*₂₀点)突然 变小,判定该点为分段点,将实验曲线分成 2 段,用 三次 Bezier 曲线分段拟合。前段拟合的三次 Bezier



图 2 EPE 的静态压缩应力-应变曲线 Fig.2 Static compression stress-strain curve of EPE

曲线的控制点 $P_{10}(0, 0)$ 和 $P_{13}(0.3, 0.1075)$ 为已 知点,通过反复比较,确定其它 2 个控制点 P_{11} 和 P_{12} 的坐标分别为(0.03,0.042)和 P_{13} (0.15,0.032)。 后段拟合的三次 Bezier 曲线的控制点 P_{20} (0.3,0.1075)和 P_{23} (0.8,1.5775)为已知点,通过反复比较,确定其它 2 个控制点 P_{21} 和 P_{22} 的坐标分别为(0.65,0.31)和 P_{13} (0.72,0.67)。拟合曲线如图 3中的实线所示。

图 3 中的点划线表示实验曲线,通过比较不难看 出,拟合曲线和实验曲线几乎完全重合。衡量拟合曲 线与实验曲线的拟合度可用总偏差 φ 来评判,φ 的表 达式见式(3)。

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \left[\sigma(t_i) - \sigma_i \right]^2 \tag{3}$$

式中:n为实验曲线上取样点的个数; σ_i 为实验 曲线上第i个取样点对应的应力值; $\sigma(t_i)$ 为第i个取 样点应力的拟合值。

设定阈值 α ,只有当 $\varphi < \alpha$ 时,才判定拟合曲线与 实验曲线有很好的拟合度。显然,阈值 α 越小或 φ 越 小,拟合度越好。

部分实验数据或处理得到的数据见表 2。根据式 (3)求得 $P_{10}P_{13}$ 段总偏差 $\varphi_1=0.000589$, $P_{20}P_{23}$ 段总 偏差 $\varphi_2=0.003281$,整个拟合曲线的总偏差 $\varphi=\varphi_1+$ $\varphi_2=0.00387$ 。可根据实验采样点的数目假定阈值 $\alpha=0.0161$,显然 $\varphi<\alpha_{\circ}$

图 3 中的虚线为特征多边形 *P*₁₀*P*₁₁*P*₁₂*P*₁₃ 和 *P*₂₀*P*₂₁*P*₂₂*P*₂₃。由前述可知,*P*₁₀ 点、*P*₁₁ 点、*P*₁₂ 点和 *P*₁₃ 点的坐标分别为(0,0),(0.03,0.042),(0.15, 0.032)和(0.3,0.1075),由特征多边形 *P*₁₀*P*₁₁*P*₁₂*P*₁₃



图 3 拟合的 EPE 三次 Bezier 曲线与实验曲线比较 Fig.3 Comparison between fitted EPE cubic Bezier curve and experimental curve

确定的三次 Bezier 曲线参数方程见式(4), 即为 EPE 前段(P₁₀P₁₃段)本构模型。

$$\begin{cases} \varepsilon_1(t) = 0.009t + 0.027t^2 - 0.006t^3 \\ \sigma_1(t) = 0.126t - 0.156t^2 + 0.1375t^3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \quad (4)$$

同样,由前述可知,P₂₀点、P₂₁点、P₂₂点和P₂₃ 点的坐标分别为(0.3,0.1075),(0.65,0.31),(0.72, 0.67)和(0.8,1.5775),由特征多边形 P₂₀P₂₁P₂₂P₂₃ 确定的三次 Bezier 曲线参数方程见式(5),即为 EPE 后段(P₂₀P₂₃段)本构模型。

$$\begin{cases} \varepsilon_2(t) = 0.03 + 0.105t - 0.084t^2 + 0.029t^3 \\ \sigma_2(t) = 0.1075 + 0.6075t + 0.4725t^2 + 0.39t^3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1 \end{cases}$$
(5)

表 2 部分数据 Tab.2 Partial data

EPE 缓冲系数-最大应力曲线 3

缓冲效率为缓冲材料压缩单位厚度,能够减缓跌 落重物的冲击动能。缓冲系数(C)是缓冲效率的倒 数,可以表示为式(6)。在缓冲包装设计中,常采用 缓冲系数-最大应力曲线来设计衬垫的尺寸。

$$C = \frac{\sigma}{e} = \frac{\sigma}{\int_{0}^{\varepsilon} \sigma \mathrm{d}\varepsilon}$$
(6)

目前,在应力-应变曲线方程未知的情况下,计算 缓冲系数 C 常用如下方法^[15]。

1)根据实验得到的应力-应变曲线,利用式(7) 计算 ∆e_。

$$\Delta e_n = (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})(\sigma_n - \sigma_{n-1})/2 + (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1})\sigma_{n-1}$$
(7)
2)根据式(8)计算 e_{no}

 $e_n = e_{n-1} + \Delta e_n$ (8)

3) 根据式(9) 计算得到 C_n。根据计算得到的 C_n 和实验得到的 σ_n 就可以绘出缓冲系数-最大应力曲 线。

$$C_n = \frac{\sigma_n}{e_n} \tag{9}$$

显然,如果应力-应变曲线用参数方程表示,那么 就不需要采用上述方法来得到缓冲系数-最大应力曲 线,而且缓冲系数-最大应力曲线也可用参数方程表 示出来。

 $\sigma_1(t) = 0.126t - 0.156t^2 + 0.1375t^3$

由前述可知 ,EPE 本构模型用三次 Bezier 曲线分

段来表示,故缓冲系数亦用参数方程分段表示。根据 式(6),可得前段的缓冲系数 C_1 ,用式(10)表示。

$$C_{1} = \frac{\sigma_{1}(t)}{\int_{0}^{t} \sigma_{1}(t) d\varepsilon_{1}(t)} = \frac{\sigma_{1}(t)}{a_{t}t + b_{t}t^{2} + c_{t}t^{3} + d_{t}t^{4} + f_{t}t^{5} + g_{1}t^{6}} \qquad 0 < t \le 1$$
(10)

式中: $a_1 = L_{13}M_{13}/2$; $b_1 = (2L_{12}M_{13} + 3L_{13}M_{12})/5$; $c_1 = (L_{11}M_{13} + 2L_{12}M_{12} + 3L_{13}M_{11})/4$; $d_1 = (L_{11}M_{12} + 2L_{12}M_{11} + 2L_{12}M_{11})/4$ $3L_{13}M_{10}/3$; $f_1 = (L_{11}M_{11} + 2L_{12}M_{10})/2$; $g_1 = L_{11}M_{100}$

 L_{10} , L_{10} , L_{12} , L_{13} , M_{10} , M_{11} , M_{12} , M_{13} 含义同 L_0 , L_1 , L_2 , L_3 , M_0 , M_1 , M_2 , M_{3o}

根据式(6),可得后段的缓冲系数 C₂,用式(11) 表示。

$$C_{2} = \frac{\sigma_{2}(t)}{W + a_{2}t + b_{2}t^{2} + c_{2}t^{3} + d_{2}t^{4} + f_{2}t^{5} + g_{2}t^{6}}$$
$$0 \le t \le 1$$
(11)

式中, $a_2=L_{23}M_{23}/2$; $b_2=(2L_{22}M_{23}+3L_{23}M_{22})/5$; $c_2 = (L_{21}M_{23} + 2L_{22}M_{22} + 3L_{23}M_{21})/4$; $d_2 = (L_{21}M_{22} + 2L_{22}M_{21} + 2L_{22}M_{21})/4$ $3L_{23}M_{20}/3$; $f_2=(L_{21}M_{21}+2L_{22}M_{20})/2$; $g_2=L_{21}M_{20}$; $W=a_1+$ $b_1 + c_1 + d_1 + f_1 + g_{1o}$

 L_{20} , L_{20} , L_{22} , L_{23} , M_{20} , M_{21} , M_{22} , M_{23} 含义同 L_0 , L_1 , L_2 , L_3 , M_0 , M_1 , M_2 , M_{3o}

结合式(4) 式(5) 式(10)和式(11),得 到基于本构模型的 EPE 分段缓冲系数-最大应力曲 线参数方程。前段表示为式(12),后段表示为式 (13)

$$0 < t \le 1 \tag{12}$$

(13)

 $\sigma_1(t)$ $-0.004\ 12t + 0.020\ 47t^{2} - 0.023\ 64t^{3} + 0.018\ 00t^{4} + 0.005\ 67t^{5}$ $\sigma_2 = 0.1075 + 0.6075t + 0.4725t^2 + 0.39t^3$ $0 \le t \le 1$ $\sigma_2(t)$ $0.016\ 37 + 0.056\ 55t - 0.048\ 83t^2 + 0.036\ 06t^3 - 0.143\ 65t^4 + 0.228\ 64t^5 + 0.112\ 87t^6$

将实验得到的数据带入式 (7—9), 得到与实验 曲线采样点一一对应的缓冲系数。以缓冲系数为纵坐 标,实验曲线采样点的应力值为横坐标,得到如图4 中点划线所示的缓冲系数-最大应力曲线。增大取样 间隔,可得到光滑的曲线。

根据式(12-13),可直接绘制 EPE 缓冲系数-最 大应力曲线,如图4中实线所示,缓冲系数C部分数 据见表 2。由图 4 中实线可以看出,该 EPE 缓冲系数-最大应力曲线的最低点为(0.4529 , 5.0362)。为了减 小外包装的尺寸和获得较大的缓冲效率,通常取最低 点的数据进行缓冲包装设计。

比较图 4 中的实线和点划线分别表示的 2 条缓 冲系数-最大应力曲线可以看出,2条曲线有较好的拟 合度,基于本构模型(用三次 Bezier 曲线参数方程分



图 4 EPE 的缓冲系数-最大应力曲线 Fig.4 EPE buffer coefficient-maximum stress curve

段表示)的 EPE 缓冲系数-最大应力曲线用参数方程 表示是可行的。

4 结语

通过实验得到 EPE 的应力-应变曲线,利用三次 Bezier 曲线将实验曲线分成两段,分别进行拟合,比 较总偏差与设定阈值大小,判定拟合曲线与实验曲线 有很好的拟合度,进而得到了 EPE 分段本构模型。基 于本构模型建立了 EPE 分段缓冲系数-最大应力曲线 参数方程,本构模型、基于本构模型建立的 EPE 分段 缓冲系数-最大应力曲线均收敛于分段点(0.3, 0.1075), 且当拟合应力值取 0.4529 MPa 时, 得到缓 冲系数最小值(5.0362)。研究表明,用三次 Bezier曲 线参数方程分段表示 EPE 的本构模型是可行的,利 用三次 Bezier 曲线分段建立的 EPE 本构模型, 可以 直接计算 EPE 的缓冲系数,从而得到缓冲系数-最大 应力曲线参数方程,为缓冲包装设计提供了可靠的依 据。当然,用三次 Bezier 曲线参数方程分段(不一定 是 2 段,可以是多段)表示其它缓冲材料的本构模型 也是可行的,三次 Bezier 曲线为建立缓冲材料的本构 模型和缓冲特性曲线方程提供了一种方法。 若缓冲系 数-最大应力曲线方程未知,则需在缓冲系数-最大应 力曲线上取点进行缓冲包装设计。若缓冲系数-最大 应力曲线方程已知,则可直接利用该方程进行缓冲包 装设计。缓冲材料本构模型拟合方法各异,用三次 Bezier 曲线建立缓冲材料的本构模型和由此得到的 缓冲特性曲线方程统一和简化了计算机辅助缓冲包 装设计的程序,从而提高了缓冲包装设计的效率。

参考文献:

- 程琳,王伟.常见缓冲包装材料的应用现状[J].上 海包装,2014(6):53—54.
 CHENG Lin, WANG Wei. Application Status of Common Cushioning Packaging Materials[J]. Shanghai Packaging, 2014(6):53—54.
 (2) 克丽语, 爆冲包装抹料的店用开始屋田,印刷抹去
- [2] 辛丽颖.缓冲包装材料的应用及发展[J].印刷技术, 2016(10):42-43.
 XIN Li-ying. Application and Development of Cushioning Packaging Materials[J]. Printing Technology, 2016(10):42-43.
- [3] 肖雯娟,郝阳.常用密度 EPE 的静态压缩缓冲特性 试验研究[J]. 中国包装工业, 2015(8): 116—120.
 XIAO Wen-juan, HAO Yang. Experimental Study on Static Compression Cushioning Characteristics of Common Density EPE[J]. China Packaging Industry, 2015(8): 116—120.
- [4] 刘继飞,韩雪山,王伟,等. 蠕变对发泡聚乙烯缓冲 性能影响的研究[J]. 包装工程, 2014, 35(3): 48—51.

LIU Ji-fei, HAN Xue-shan, WANG Wei, et al. Effects of Cushion Property of Foamed Polyethylene EPE Cushioning Material Exerted by the Creep[J]. Packaging Engineering, 2014, 35(3): 48—51.

- [5] 田芃, 滑广军. 尺度效应对发泡聚乙烯静态缓冲性 能的影响[J]. 包装学报, 2013, 5(4): 30—33.
 TIAN Peng, HUA Guang-jun. Impact of Scale Effect on Cushioning Properties of Expanded Polyethylene[J].
 Packaging Journal, 2013, 5(4): 30—33.
- [6] 苗红涛. EPE 泡沫塑料在多次冲击下的缓冲性能[J]. 包装工程, 2017, 38(5): 111—114.
 MIAO Hong-tao. EPE Foam Cushioning Performance under Repeated Dropping Shocks[J]. Packaging Engineering, 2017, 38(5): 111—114.
- [7] 杨帅,康勇刚,齐菲. 低温对聚乙烯发泡材料动态缓 冲性能的影响[J]. 包装工程, 2015, 36(7): 21-25.
 YANG Shuai, KANG Yong-gang, QI Fei. Effect of Low Temperature upon Dynamic Cushioning Properties of EPE Foam Material[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(7): 21-25.
- [8] RUIZ-HERRERO J L. Prediction of Cushion Curves for Closed Cell Polyethylene-based Foams Part I: Experimental[J]. Cellular Polymers, 2005, 24(6): 329–346.
- [9] RUIZ-HERRERO J L. Prediction of Cushion Curves for Closed Cell Polyethylene-based Foams Part II: Experimental[J]. Cellular Polymers, 2006, 25(3): 159–175.
- [10] TATEYAMAK, YAMADAH, OGASAWARAN. Effect of Strain Rate on Compressive Properties of Foamed Polyethylene Film[J]. Polymer Testing, 2016, 52: 54–62.
- [11] 都学飞. EPE 缓冲材料的静态压缩性能试验研究[J]. 轻工科技, 2018, 34(2): 20—22.
 DU Xue-fei. Experimental Study on Static Compression Performance of EPE Cushioning Material[J]. Light Industry Science and Technology, 2018, 34(2): 20—22.
- [12] 孙聚杰,温时宝. EPE 静态压缩应力-应变曲线模拟
 [J]. 包装与食品机械, 2009, 27(1): 37—39.
 SUN Ju-jie, WEN Shi-bao. Simulation of Strain-strain Curve for EPE Static Compression[J]. Packaging and Food Machinery, 2009, 27(1): 37—39.
- [13] 王德忠.包装计算机辅助设计[M].北京:印刷工业 出版社, 2009.
 WANG De-zhong. Packaging Computer Aided Design [M]. Beijing: Printing Industry Press, 2009.
- [14] 卢富德,高德.蜂窝纸板一维动态本构关系及应用
 [J].振动工程学报,2016,29(1):38—44.
 LU Fu-de, GAO De. One-dimension Constitutive Relationship and Its Application for Honeycomb Paperboard[J]. Journal of Vibration Engineering, 2016, 29(1):38—44.
- [15] 彭国勋.物流运输包装设计(第2版)[M].北京:印刷工业出版社, 2014.
 PENG Guo-xun. Packaging Design for Logistic Transport (2nd Edition)[M]. Beijing: Printing Industry Press, 2014.