非线性包装系统自由振动特性的对称性解法

郑明亮
（浙江理工大学，杭州 310018）

摘要：目的 基于 Lie 积分法精确解析求解包装系统的非线性自由振动响应。**方法** 考虑到弹簧恢复力三次多项式形式的非线性关系，依据分析力学准则建立系统单自由度含阻尼动力学模型；首次运用微分方程 Lie 群变换理论求解系统的对称性和 2 个首次积分，证明在结构设计参数满足一定关系时，包装系统自由振动的精确解是一类椭圆积分函数。**结果** 实际算例仿真计算表明，系统的自共振频率随着初始振幅条件的增大而增大，非线性系数项使得位移响应振幅的衰减变快。**结论** 从推演过程可看出，将 Lie 对称性理论应用到包装系统非线性动力学特性研究中，系统的非线性系数以及阻尼系数无需满足小参数假设，因此适用范围更广。

关键词：包装系统；非线性特性；Lie 对称性；首次积分；自共振
中图分类号：TB487；TB485.3；O322 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3563(2018)09-0007-05
DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2018.09.002

A Symmetric Solution for the Free Vibration Characteristics of a Nonlinear Packaging System

ZHENG Ming-liang
(Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

ABSTRACT: The work aims to accurately solve the nonlinear free vibration response of a packaging system based on Lie integral method. Considering the nonlinear relation of the cubic polynomial form in the spring restoring force, the system model with single degree of freedom and damping dynamics was established based on the analytical mechanics principle. The differential equation Lie group transformation was used for the first time to solve the symmetry and two first integrals of the system, for the purpose of proving that, the exact solution of the free vibration of the packaging system was a class of elliptic integral functions when structural design parameters satisfied certain relations. The actual numerical simulation calculations showed that, the self-resonance frequency of the system increased with the increase of the initial amplitude conditions, and the nonlinear coefficient made the attenuation of the displacement amplitude faster. From the perspective of deduction process, the Lie symmetry theory is applied to the study on the nonlinear dynamic characteristics of packaging system, and the nonlinear coefficient and damping coefficient of the system do not need to satisfy the hypothesis of small parameters; therefore, the application scope is wider.

KEY WORDS: packaging system; nonlinear characteristics; Lie symmetry; first integral; self-resonance

包装系统是现代物流运输工程中的重要组成部分，它的基本任务是保护包装内的商品在流通及储存过程中不受损伤而失效[1]。由于生产环境工序和物流管理复杂多变，包装件在流通过程中发生冲击和振动的现象十分普遍，如何利用缓冲包装材料元件如弹簧和阻尼器等进行减振保护一直是包装动力学研究中的重要课题。以往的研究中，为了降低理论难度，减少分析计算的工作量，通常将包装系统处理成线性系统，但现代工程实验发现包装材料的非线性属性在一定的载荷和频率域内对其振动响应影响十分突出，若忽略将会导致结果出现较大误差[2]，因此，建立非线性包装系统并利用现代动力学理论开展研究，对于确

收稿日期：2017-12-24
作者简介：郑明亮（1988—），男，浙江理工大学博士生，主要研究方向为机械动力学与控制等。

保包装件安全、优化包装设计具有重要意义。

目前，在包装系统非线性动力学研究中多以数值仿真为主，即采用数值积分方法，计算系统的振动响应，从而分析系统中存在的分岔、混沌现象[3—7]。在非线性振动方程解析精确解研究方面，大多基于摄动法、多尺度法等传统的解析方法开展[8—9]，其共同特点是将非线性系数当作小参数，将原系统处理为弱非线性系统；椭圆函数摄动法、广义谐波函数摄动法、增量谐波平衡方法[10—12]等虽适用于强非线性系统，但不适用于大阻尼系统。Lie 对称性理论在处理线性和非线性、常系数和变系数微分方程的问题都是等同的，和其他的现代分析方法一起，是求常/偏微分方程解析解最可能统一的工具，可以用来进行大范围的参数研究，且具有计算过程简洁和易于程序化等特点[13]。国内外关于利用 Lie 对称性方法研究包装系统非线性动力学还未有报道。文中拟基于 Lie 对称性方法来精确计算包装系统非线性自由振动响应。

1 包装系统非线性动力学模型

在包装动力学中，由于缓冲材料本身的属性以及包装结构的多变，使得弹性恢复力往往呈现非线性特性，不失一般性[14]，可用位移的三次多项式函数表示此非线性关系，单自由度物品包装系统自由振动时，可简化为如图 1 所示的力学模型。

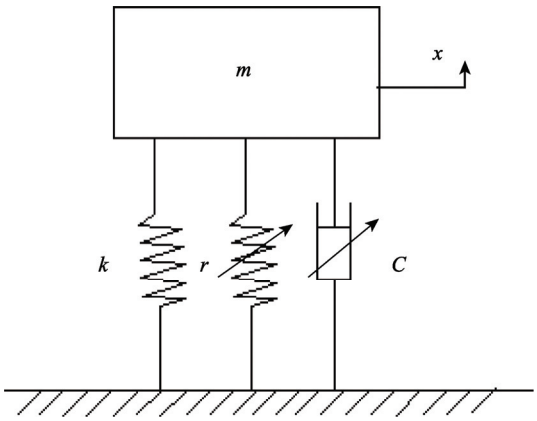

图 1 包装件振动力学模型

Fig.1 Vibration mechanics model of package

图 1 中包装件质量为 m，粘性阻尼系数为 c，硬弹簧系统弹性刚度非线性一次项系数为 k，三次项系数为 r（$r>0$）。

利用分析力学的方法建立系统的自由振动方程，取系统静止平衡位置为坐标原点，广义坐标为 x，竖直向上为正，系统的动能、势能和 Lagrange 函数为：

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2, U=mgx+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}rx^4, L=T-U \tag{1}$$

系统粘性阻尼耗散函数为：

$$\Phi=\frac{1}{2}c\dot{x}^2 \tag{2}$$

任何振动或运动系统，分析力学中第 2 类 Lagrange 方程为[15]：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}+\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}=Q'_j \tag{3}$$

系统广义激振力 $Q'_j=mg$，展开得到单自由度包装系统自由振动方程为：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx+rx^3=0 \tag{4}$$

单自由度非线性包装系统自由振动是一类符合含阻尼的 Duffing 方程。传统的非线性分析方法（解析或者数值）大都是近似处理，其结果可能难以十分准确描述系统的性质，因此式（4）的精确解析表达式是一个十分有意义的课题。

2 基于 Lie 对称性法的包装系统自由振动响应精确解析解

考虑单参数 Lie 点变换群的生成元以及一、二阶延拓元为：

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi(t,x), x^*=x+\varepsilon\eta(t,x), \\ X^{(0)}=\xi(t,x)\dfrac{\partial}{\partial t}+\eta(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x}, \\ X^{(1)}=X^{(0)}+[\eta_t+(\eta_x-\xi_t)\dot{x}-\xi_x\dot{x}^2]\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}, \\ X^{(2)}=X^{(1)}+[\eta_{tt}+(2\eta_{tx}-\xi_{tt})\dot{x}+(\eta_{xx}-2\xi_{tx})\dot{x}^2- \\ \qquad \xi_{xx}\dot{x}^3+(\eta_x-2\xi_t-3\xi_x\dot{x})\ddot{x}]\dfrac{\partial}{\partial \ddot{x}} \end{cases} \tag{5}$$

如果在 Lie 点变换群（5）作用下，微分方程（4）的形式仍然保持不变，那么称 Lie 变换群为原方程的对称群，该群的变换生成元称为原方程的无穷小对称，群的切向量即系数 ξ,η 满足决定方程：

$$X^{(2)}(\ddot{x}-f(t,x,\dot{x}))\big|_{\ddot{x}=f}=0 \tag{6}$$

式中：$f=-\dfrac{c}{m}\dot{x}-\dfrac{k}{m}x-\dfrac{r}{m}x^3$。

展开化简得到 Lie 对称确定方程为：

$$\begin{aligned} &\eta_{tt}+(2\eta_{tx}-\xi_{tt})\dot{x}+(\eta_{xx}-2\xi_{tx})\dot{x}^2-\dot{x}^3\xi_{xx}- \\ &\quad \xi f_t-\eta f_x+(\eta_x-2\xi_t-3\dot{x}\xi_x)f- \\ &\quad (\eta_t+(\eta_x-\xi_t)\dot{x}-\dot{x}^2\xi_x)f_{\dot{x}}=0 \end{aligned} \tag{7}$$

式（7）是未知函数 ξ 和 η 关于 3 个变量 $t,x,\dot{x}$ 的偏微分方程，但是并没有出现 ξ 和 η 关于 $\dot{x}$ 的偏导数项，因此，确定方程（7）可分解成几个关于未知函数 ξ 和 η 的超定微分方程，解此方程即可得到所有无穷小对称，令 $(\dot{x})^3,(\dot{x})^2,(\dot{x})^1,(\dot{x})^0$ 的多项式系数为 0，得到易解 4 个方程为：

$$\begin{cases}\xi_{xx}=0\\ \eta_{xx}-2\xi_{tx}+2\dfrac{c}{m}\xi_x=0\\ 2\eta_{tx}-\xi_{tt}+\dfrac{c}{m}\xi_t+3\xi_x\left(\dfrac{k}{m}x+\dfrac{r}{m}x^3\right)=0\\ \eta_{tt}+\eta\left(\dfrac{k}{m}+\dfrac{3r}{m}x^2\right)-\\ (\eta_x-2\xi_t)\left(\dfrac{k}{m}x+\dfrac{r}{m}x^3\right)+\dfrac{c}{m}\eta_t=0\end{cases}\tag{8}$$

对前 2 个等式可作简化假设：

$$\xi(t,x)=p(t),\ \ \eta(t,x)=q(t)x\tag{9}$$

可以找到无穷小对称的 2 组特解：

$$\begin{cases}\xi_1(t,x)=-1,\eta_1(t,x)=0\\ \xi_2(t,x)=-\mathrm{e}^{\frac{c}{3m}t}\\ \eta_2(x,y)=\dfrac{c}{3m}\mathrm{e}^{\frac{c}{3m}t}x,\ mk=\dfrac{2}{9}c^2\end{cases}\tag{10}$$

定理 1[16]：如果 $\Lambda(t,x,\dot{x})$ 是常微分方程 $\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$ 的积分因子，则积分因子向量空间上的点对称将积分因子映射成原方程的积分因子，即 $\Lambda(t,x,\dot{x})$ 满足确定方程：

$$\begin{aligned}&\tilde{X}\Lambda=c\Lambda,c=\mathrm{const}\\ &\tilde{X}=\xi\frac{\partial}{\partial t}+\eta\frac{\partial}{\partial x}+\\ &\quad[\eta_t+(\eta_x-\xi_t)\dot{x}-\xi_x\dot{x}^2]\frac{\partial}{\partial\dot{x}}+R\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda},\\ &R=\frac{\partial[\eta_t+(\eta_x-\xi_t)\dot{x}-\xi_x\dot{x}^2]}{\partial\dot{x}}=\eta_x-\xi_t-2\dot{x}\xi_x\end{aligned}\tag{11}$$

定理 2[17]：如果 $\Lambda(t,x,\dot{x})$ 是常微分方程 $\ddot{x}=f(t,x,\dot{x})$ 的积分因子，则与其相对应的原方程的首次积分可约化为：

$$\begin{aligned}\psi(t,x,\dot{x})=&\int_C[(\dot{x}\Lambda_x+\dot{x}^2\Lambda_x+\dot{x}(f\Lambda)_{\dot{x}}-f\Lambda)\mathrm{d}t-\\ &(\Lambda_t+(f\Lambda)_{\dot{x}}+\dot{x}\Lambda_x)\mathrm{d}x+\Lambda\mathrm{d}\dot{x}]\end{aligned}\tag{12}$$

式中：C 为 $(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{\dot{x}})$ 到 $(t,x,\dot{x})$ 的任意轨线。

将式（10）依次代入式（11）和式（12），可以得到非线性包装系统自由振动的首次积分为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{C_1\mathrm{e}^{-\frac{4c}{3m}t}-\dfrac{1}{2}x^4}-\dfrac{c}{3m}x\\ \dfrac{4c}{3m}z^{1/4}\displaystyle\int_{\tilde{x}}^{x}\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\left(2z-\dfrac{\tau^4}{2}\right)^{1/2}}=C_2,\\ z=\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{3m}x+\dot{x}\right)^2\end{cases}\tag{13}$$

将初始条件 $x(0)=\alpha,\dot{x}(0)=\beta$ 代入式（13），结合消元法，可得其精确解析解表达式为：

$$\begin{aligned}&\frac{4c}{3m}\left[\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{c}{3m}\alpha\right)^2+\frac{1}{4}\alpha^4\right]^{1/4}\mathrm{e}^{-\frac{c}{3m}t}\\ &\int_{\alpha}^{x}\frac{\mathrm{d}\tau}{\left[\left(\beta+\frac{c}{3m}\alpha\right)^2+\frac{1}{4}\alpha^4\right]\mathrm{e}^{-\frac{4c}{3m}t}-\frac{\tau^4}{2}\Big]^{1/2}}=C_2\end{aligned}\tag{14}$$

这里需要指出，系统的结构参数在满足一定条件下，非线性系数并没有直接出现在式（14）左边。同时注意积分公式是一类 Legendre 完全椭圆积分，其模数为 1/2，但无法用精确初等函数表达出来，只能用高精度数值差分计算求解或者可用近似的三角函数逼近。由椭圆积分的性质，可以将式（14）展开，近似表达成：

$$\begin{aligned}&x=A\mathrm{e}^{-\frac{c}{2m}t+\frac{r}{c}d_1(1-\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t})}\\ &\quad\sin[\frac{c}{6m}t+\frac{r}{c}d_2(1-\mathrm{e}^{-\frac{c}{m}t})+\varphi_0]\\ &A\sin\varphi_0=\alpha,A\cos\varphi_0=\frac{6m\beta+\alpha(3c-6rd_1)}{c+6rd_2}\\ &d_1=\frac{3cA^2}{16k},d_2=\frac{cA^2}{16k}\end{aligned}\tag{15}$$

利用式（15）可以预测自由振动条件下包装系统的共振频率和初始结构设计参数的影响关系，进而为前期包装设计提供参考和依据。

3　包装系统非线性振动特性分析

综合对比文献[14]和文献[18]，取文献[14]中的振体质量 m=300 kg，常见弹簧刚度一次系数 k=6×10^4，对应文献[18]中系数比 ε=0.01，可计算出三次项系数 r=6×10^8。按照文中参数满足的结构关系，则阻尼系数应取 c=9×10^3，而文献[18]中的阻尼系数可接近 1000，因此只要更多地采用高阻尼材料，如复合型粘弹性金属合金，实现上述参数是完全有可能的，同时为了克服目前大多文献中小参数假设的限制，可将参数取值变大些。设初始条件 β=0，利用式（15）得到初始振幅对系统自共振频率的影响，见表 1。

表 1　单自由度非线性包装系统自由振动的近似共振频率
Tab.1　The approximate resonance frequency of the free vibration of a single degree of freedom nonlinear packaging system

初始振幅/m	自共振频率/Hz
0.005	5.52
0.01	7.08
0.015	9.69
0.02	13.33
0.03	23.75

从表 1 中可看出支承弹簧系统自振频率随初始振幅的增大而增大，而非线性振动硬弹簧的一个典型特征即是系统固有频率随振幅变大而变大，因此该例的计算结果符合文中图 1 模型的建立前提。当系统的非线性系数为 0 时，包装系统退化为线性系统，此时系统的阻尼比为 $\sqrt{9/8}$，属于过阻尼，系统很快趋近平衡位置，不会出现往复振荡，因此非线性系数为 0 时，自共振频率为 0，明显地，硬弹簧非线性项的存在加大了系统的共振频率。

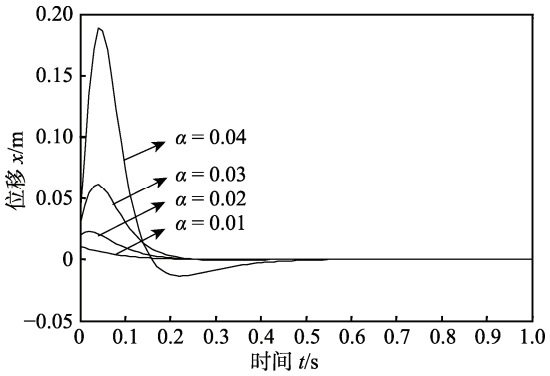

图 2 不同初始振幅下系统振动的位移时间曲线

Fig.2 Time travel curve of system's vibration displacement under different initial amplitudes

由图 2 可以看出，不同初始振幅条件下系统的运动都具有衰减特性，但速度不一样。随着初始振幅的增大，系统衰减到静止的时间变慢，位移响应峰值却变大，这也符合实际实验现象。

上述计算表明非线性包装系统自由振动时，初值条件对其响应有重要影响，这也是非线性振动的本质属性之一（对初值的敏感性）。另外，当系统的非线性系数为 0 时，包装系统退化为线性系统，它的位移响应与非线性系统对比见图 3。从图 3 中可以看出硬弹簧特性非线性项使得系统振幅的衰减变快，这一点与初始条件的影响规律不同，因此必须综合利用系统的非线性特性和合理设置初始条件才能显著提高包装系统的减振缓冲性能。

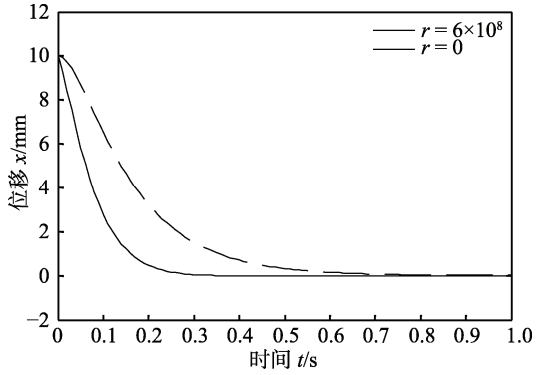

图 3 线性与非线性包装系统自由振动响应对比

Fig.3 Comparison of free vibration response between linear and nonlinear packaging systems

4 结语

非线性包装系统自由振动响应的求解存在着多种近似方法（包括近似解析和数值计算），但都存在一定的局限性误差。文中应用 Lie 对称方法在无任何假设的前提下，得到了单自由度系统的精确位移响应，精确解析解的表达式虽不容易用初等函数的方法表达出来，但却可以通过构造与系统能量相关的首次积分来降维约化表达式。实际算例仿真计算表明，包装系统非线性的强弱和初始振幅条件均对自由振动的共振频率、位移（响应幅值和衰减周期）有着直接、明显的影响。文中结果指明了系统结构设计参数的修改方向，为精密仪器设备、军工设备等的运输包装系统中更复杂结构动力学的先进控制方法和参数优化设计奠定了基础。下一步可利用 Lie 对称性理论研究非线性包装系统的受迫振动响应规律。

参考文献：

[1] 张允峰，王婧，彭国勋. 人机工程与物流运输包装设计[J]. 中国包装工业, 2009(4): 60—62.
ZHANG Yun-feng, WANG Jing, PENG Guo-xun. Ergonomics and Logistics Transportation Packaging Design[J]. China Packaging Industry, 2009(4): 60—62.

[2] 李宏卫. 非线性自治包装系统动态响应研究[D]. 无锡:江南大学, 2017.
LI Hong-wei. Study on Dynamic Response of Nonlinear Autonomous Packaging System[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2017.

[3] PELEG K. Frequency Response of Non-linear Single Degree-of-freedom Systems[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1979, 21(2): 75—84.

[4] JIANG Jiu-hong, WANG Zhi-wei. Dropping Damage Boundary Curves for Cubic and Hyperbolic Tangent Packaging Systems Based on Key Component[J]. Packaging Technology and Science, 2012, 25(7): 397—411.

[5] DENG R, DAVIES P, BAJAJ A K. A Nonlinear Fractional Derivative Model for Large Uni-axial Deformation Behavior of Polyurethane Foam[J]. Signal Processing, 2006, 86(10): 2728—2743.

[6] 蒋超，杨强，徐慧东，等. 双质体振动机 Hopf 分岔反控制问题的理论分析和数值研究[J]. 太原理工大学学报, 2017, 48(5): 848—854.
JIANG Chao, YANG Qiang, XU Hui-dong, et al. Theoretical Analysis and Numerical Study of Anti-controlling Hopf Bifurcation in A Double-Mass Vibrator[J]. Journal of Taiyuan University of Technology, 2017, 48(5): 848—854.

[7] 杨小俊. 振动环境中非线性运输包装系统的混沌响应[J]. 湖北工业大学学报, 2005, 20(5): 86—90.
YANG Xiao-jun. The Response of Chaos to Non linear

Transit Packaging System in Oscillatory Surroundings[J]. Journal of Hubei University of Technology, 2005, 20(5): 86—90.

[8] 黄秀玲, 王军, 卢立新, 等. 三次非线性包装系统关键部件冲击响应影响因素分析[J]. 振动与冲击, 2010, 10(2): 179—181.
HUANG Xiu-ling, WANG Jun, LU Li-xin. Factors Influencing Shock Characteristics of Acubic Nonlinear Packaging System with Critical Component[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 10(2): 179—181.

[9] 朱杰, 李晓玺, 黄晨, 等. 食品模拟体系中疏水性淀粉基膜材的结构变化[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2014(3): 111—116.
ZHU Jie, LI Xiao-xi, HUANG Chen, et al. Structural Changes of Hydrophobic Starch-Based Film in Food Stimulants[J]. Journal of South China University of Technology(Natural Science Edition), 2014, 42(3): 111—116.

[10] 陈树辉. 强非线性振动系统的定量分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
CHEN Shu-hui. Quantitative Analysis method for Strong Nonlinear Vibration System[M]. Beijing: Science Press, 2007.

[11] 张炜, 薛飞, 卢富德, 等. 虑易损件物品-EPE缓冲系统冲击响应分析[J]. 振动与冲击, 2015, 34(9): 116—119.
ZHANG Wei, XUE Fei, LU Fu-de. Impact-response Analysis of the System Composed of Critical Component and EPE Cushion[J]. Journal of Vibration and shock, 2015(9): 116—119.

[12] 高德, 卢富德. 具有转动包装系统的正切非线性模型冲击响应研究[J]. 振动与冲击, 2010, 10(3): 131—136.
GAO De, LU Fu-de. Shock Response of a Nonlinear Tangent Packaging System with Rotation[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 10(3): 131—136.

[13] 郑明亮. 利用 Lie 对称性法研究 Duffing 自由振动的精确解析动态响应[J]. 贵阳学院学报(自然科学版), 2017, 12(2): 1—3.
ZHENG Ming-liang. Study on the Exact Analytical Dynamic Response of Duffing Free Vibration Using Lie Symmetry Method[J]. Journal of Guiyang University (Natural Science Edition), 2017, 12(2): 1—3.

[14] 陈安军. 斜支承弹簧包装系统非线性振动特性分析[J]. 包装工程, 2009, 30(11): 63—66.
CHEN An-jun. Analysis of Nonlinear Vibration Characteristics of Packaging System with Tilted Support Spring[J]. Packaging Engineering, 2009, 30(11): 63—66.

[15] LIANG L F, LIU D K, SONG H Y. The Generalized Quasi-variational Principles of Non-conservative Systems with Two Kinds of Variables[J]. Science in China series G: Physics and Astronomy, 2005, 48(5): 600—613.

[16] 布卢曼 G W, 安科 S C. 微分方程的对称性与积分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
BLUMEN G W, BIANCO S C. The Symmetry and Integral Method of Differential Equations[M]. Beijing: Science Press, 2009.

[17] NAIL H I. 微分方程与数学物理方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.
NAIL H I. Differential Equations and Mathematical Physical Equations[M]. Beijing: Higher Education Press, 2013.

[18] 杨冰, 卢立新. 基础位移激励下包装系统的非线性振动分析[J]. 包装工程, 2008, 29(2): 64—67.
YANG Bing, LU Li-xin. Nonline ar Vibration of Packaging System under Foundation Displacement Excitation[J]. Packaging Engineering, 2008, 29(2): 64—67.