

机械与过程控制

UPS+UPR+S 并联机构伴随运动及正逆解分析

夏昊，赵耀虹，李瑞琴
(中北大学，太原 030051)

摘要：目的 针对二自由度的 UPS+UPR+S 并联机构对该并联机构是否具有伴随运动以及对该并联机构的位姿正逆解进行分析。**方法** 通过旋转变换矩阵得到相应向量的表达式，并建立约束方程验证是否具有伴随运动。对该机构进行正逆解分析，通过遗传算法求得机构的部分正解并与逆解相互验证，并通过实例进行验证分析，得到最佳个体、最佳适应度、多样性值和每代个体得分结果。**结果** 该机构不存在伴随运动，正解与逆解所得结果相差较小，数据可以相互吻合。正解实例得到的最佳个体为-0.267 和 0.31，结果与反解相互验证，最佳适应度逐渐减小，获得了每代得分和每代个体得分情况。**结论** 机构不存在伴随运动，性能较好，由正逆解相互吻合可知正逆解的正确性。

关键词：并联机构；伴随运动；正逆解；遗传算法

中图分类号：TB486 **文献标识码：**A **文章编号：**1001-3563(2018)07-0136-05

DOI：10.19554/j.cnki.1001-3563.2018.07.025

Concomitant Motion and Positive and Inverse Solutions of UPS+UPR+S Parallel Mechanism

XIA Hao, ZHAO Yao-hong, LI Rui-qin
(North University of China, Taiyuan 030051, China)

ABSTRACT: The work aims to check whether it has the concomitant motion and analyze the positive and inverse solutions of the position and pose with respect to UPS+UPR+S parallel mechanism with two degrees of freedom. The expression of the corresponding vector was obtained by rotating the change matrix, and the constraint equation was established to verify whether there was concomitant motion. The positive and inverse solutions of the mechanism were analyzed, and part of positive solutions of the mechanism were obtained by genetic algorithm and mutually verified with the inverse solutions. An example was given to validate the analysis, and the best individual, the best fitness, the diversity value and the score of individuals of each generation were obtained. There was no concomitant motion in the mechanism, the difference between positive solution and inverse solution was small, and the data could be consistent with each other. The best individuals obtained by positive solution were -0.267 and 0.31, subsequently mutually verified with the inverse solution. The optimal fitness decreased gradually, and the score of each generation and the score of individuals of each generation were obtained. There is no concomitant motion in the mechanism, and the performance is good. As the positive and inverse solutions coincide with each other, the correctness of the positive and inverse solutions can be proved.

KEY WORDS: parallel mechanism; concomitant motion; positive and inverse solutions; genetic algorithm

由于并联机构具有紧凑性好、刚度高、承载能力好等特点^[1]，在应用到自动化包装的领域时具有很

好的应用前景。现阶段在进行包装的现实情况下已经用到了并联机构，例如填充、封口等^[2—4]。与 6 自

收稿日期：2017-11-20

基金项目：国家自然科学基金（51275486）

作者简介：夏昊（1994—），男，中北大学硕士生，主攻机构与机器人。

通信作者：赵耀虹（1977—），女，硕士，中北大学副教授，主要研究方向为机械制造及其自动化。

由度的并联机构相比较,少自由度的并联机构往往拥有比较大的工作空间或适用于一些特殊的工作情况,所以少自由度的并联机构在包装领域有极为广阔前景^[5]。

到目前为止,对于并联机构的研究已经取得极大的进展。沈惠平、张震等^[6]对3T1R并联机构进行了结构降耦设计。Lee^[7]等提出了一种以并联机构为主体的5自由度的3D打印机。在包装领域,白龙等^[8]对一种三平动的并联机构进行了工作空间的分析。池腾腾等^[9]对一种并联机构改变运动副摆放位置静力学进行了分析。并联机构的反解相对简单,而正解却比较复杂^[10-11],传统的迭代法可能由于方程组具有强耦合性而导致结果不收敛,但目前通过不断的研究已经有很多方法,例如基于拓扑结构的方法^[12]、基于改进蚁群的方法^[13]、基于拟Newton法^[14]。文中验证该机构是否具有伴随运动,并基于遗传算法^[15]求解该机构的正解,并与反解相互验证。

1 UPS+UPR+S 并联机构伴随运动分析

1.1 机构描述

UPS+UPR+S 并联机构由三条支链组成见图1。支链1的 A_1 处是球副与定平台相连接, B_1 处与动平台固连。支链2为UPR支链, A_2 处通过U副与定平台相连, B_2 处通过R副与动平台相连, 支链中间为移动副 C_2 。支链3是UPS支链, A_3 处是U副, B_3 处是球副, 中间通过移动副 C_3 连接。需要注意该机构进行如下布置, A_2, A_3 处的U副分别有一个转动中心轴线过 A_1 处球副的中心, B_2 处转动副中心轴线与

$$R = R_{xyz}(\psi, \theta, \varphi) = R_z(\varphi)R_y(\theta)R_x(\psi) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\psi & \cos\theta\cos\psi \end{bmatrix} \quad (1)$$

A_1, A_2, A_3 在固定坐标系 A_1 下的位置矢量为 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$ 。

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{m}_2 = [a_1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{m}_3 = [0 \ a_2 \ 0]^T \end{cases} \quad (2)$$

式中: a_1, a_2 为结构参数, 为 A_1A_2 与 A_1A_3 的长度。

B_1, B_2, B_3 在动定坐标系 B_1 下的位置矢量为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 。

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = [0 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{n}_2 = [b_1 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{n}_3 = [0 \ b_2 \ 0]^T \end{cases} \quad (3)$$

式中: b_1, b_2 为结构参数, 为 B_1B_2 与 B_1B_3 的长度。

A_2 处的另一个转动轴轴线平行。

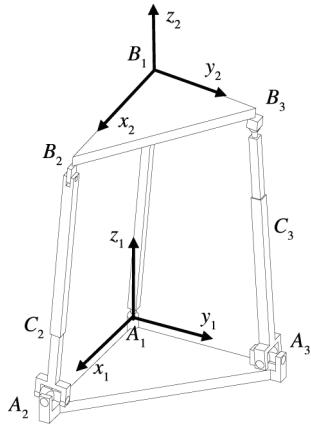


图1 UPS+UPR+S 并联机构
Fig.1 UPS+UPR+S parallel mechanism

有些并联机构在运动的过程中在被约束的自由度处会发生轻微的运动,这个运动指的就是伴随运动。伴随运动的出现是某些构型所固有的结构特性,若本机构发生伴随运动则会影响机构的性能。

1.2 伴随运动分析

文中采用RPY角的方式来描述动平台的姿态。建立的坐标系见图1,定坐标系的原点在 A_1 处球副的中心, x_1 方向由 A_1 指向 A_2 , y_1 方向由 A_1 指向 A_3 , z_1 方向通过右手螺旋定则得到。动坐标系的建立与定坐标系相似, x_2 方向由 B_1 指向 B_2 , y_2 方向由 B_1 指向 B_3 , z_2 方向通过右手螺旋定则得到。设绕 z_1 轴转动角度为 φ , 绕 y_1 轴的转动角度为 θ , 而绕 x_1 轴的转动角度为 ψ 。则旋转矩阵为:

动系矢量 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 在定系 A_1 下表示为 $\mathbf{l}_i (i=1,2,3)$ 。

$$\mathbf{l}_i = R \cdot \mathbf{n}_i + p \quad (4)$$

式中: $p = (p_x, p_y, p_z)$, 于是得到:

$$\mathbf{l}_1 = (p_x, p_y, p_z)$$

$$\mathbf{l}_2 = (b_1 \cos\varphi\cos\theta + p_x, b_1 \sin\varphi\cos\theta + p_y, -b_1 \sin\theta + p_z)$$

$$\mathbf{l}_3 = \begin{pmatrix} b_2 \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - b_2 \sin\varphi\cos\psi + \\ p_x, b_2 \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \\ b_2 \cos\varphi\cos\psi + p_y, b_2 \cos\theta\sin\psi + p_z \end{pmatrix} \quad (5)$$

根据该并联机构的位形情况 \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_2 所形成的平面的法线与 x_1 轴垂直, \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_3 所形成的平面的法线与 y_1 轴垂直且 \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_2 所形成的平面与 \mathbf{l}_1 和 \mathbf{l}_3 所形成的平面垂直, 故可建立约束方程为:

$$\begin{cases} (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \cdot (1, 0, 0) = 0 \\ (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_3) \cdot (0, 1, 0) = 0 \\ (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \cdot (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_3) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

通过化简可以得到：

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{l}_{1x}}{\mathbf{l}_{2x}} = \frac{\mathbf{l}_{1y}}{\mathbf{l}_{2y}} = \frac{\mathbf{l}_{1z}}{\mathbf{l}_{2z}} = c \\ \frac{\mathbf{l}_{1x}}{\mathbf{l}_{3x}} = \frac{\mathbf{l}_{1y}}{\mathbf{l}_{3y}} = \frac{\mathbf{l}_{1z}}{\mathbf{l}_{3z}} = d \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{则: } p_x = l_{1x} = cl_{2x} = cb_1 \cos \varphi \cos \theta + cp_x \quad (8)$$

根据结构参数已知 p_x 不受 φ 的影响, 当 $\cos \varphi = 1$ 时才满足要求, 所以 $\varphi = 0$, 因此该机构不存在绕 z_1 轴转动的伴随运动。

2 位置逆解正解分析

2.1 位置逆解

该机构的位置逆解就是已知动平台的位姿参数, 求 A_2B_2, A_3B_3 的长度, A_2B_2, A_3B_3 由向量表示为 q_2, q_3 。当 $\varphi=0$ 时, 有:

$$\begin{cases} \mathbf{l}_2 = (b_1 \cos \theta + p_x, p_y, -b_1 \sin \theta + p_z) \\ \mathbf{l}_3 = (b_2 \sin \theta \sin \psi + p_x, b_2 \cos \psi + p_y, \\ b_2 \cos \theta \sin \psi + p_z) \end{cases} \quad (9)$$

则位置逆解可由式 (10—11) 计算。

$$q_i = l_i - m_i \quad i = 2, 3 \quad (10)$$

$$\begin{cases} q_2 = l_2 - m_2 = (b_1 \cos \theta + p_x - a_1, p_y, -b_1 \sin \theta + p_z) \\ q_3 = l_3 - m_3 = (b_2 \sin \theta \sin \psi + p_x, b_2 \cos \psi + p_y - a_2, \\ b_2 \cos \theta \sin \psi + p_z) \end{cases} \quad (11)$$

于是求得位置逆解的方程为:

$$\begin{cases} q_2 = \left((b_1 \cos \theta + p_x - a_1)^2 + p_y^2 + (-b_1 \sin \theta + p_z)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ q_3 = \left((b_2 \sin \theta \sin \psi + p_x)^2 + (b_2 \cos \psi + p_y - a_2)^2 + (b_2 \cos \theta \sin \psi + p_z)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (12)$$

由式 (12) 可得运动反解算例见表 1。

表 1 运动反解算例

Tab.1 An example of inverse kinematic solution

$\sin \theta$	$\sin \psi$	q_2	q_3
-0.267	0.31	300.2610	299.8322
-0.2	0.405	289.9693	310.0407
-0.333	0.218	310.5343	290.1589
-0.067	0.051	269.9140	273.6341
0	-0.26	260	245.2259

2.2 位置正解

该并联机构的位置正解就是求动平台 B_1 点位于定坐标系的位置矢量 (p_x, p_y, p_z) 。由几何关系可知:

$$\begin{cases} p_z = R \cos \theta \\ p_x = R \sin \theta \cos \psi \\ p_y = R \sin \theta \sin \psi \end{cases} \quad (13)$$

所以位置正解只要已知 q_2, q_3 , 求 $\sin \theta$ 和 $\sin \psi$ 即可。把几何关系代入式 (12) 可得:

$$\begin{cases} q_2^2 = b_1^2 + a_1^2 + R^2 - 2a_1b_1 \cos \theta + 2b_1R \sin \theta \cos \theta \cos \psi - 2a_1R \sin \theta \cos \psi - 2b_1R \sin \theta \cos \theta \\ q_3^2 = b_2^2 + a_2^2 + R^2 - 2a_2b_2 \cos \psi - 2a_2R \sin \theta \sin \psi + 2b_2R(\sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \cos^2 \theta \sin \psi) \end{cases} \quad (14)$$

式 (14) 就是该机构的位置正解方程。

3 正解算例

采用遗传算法求解机构正解具体结果。遗传算法是根据达尔文优胜劣汰的生物进化过程从而编出的一种算法。该方法的优点是可以在较大范围内进行求解优化解, 这点相较于传统的迭代法不局限于一定范围内初值的给定。此方法的优点是可以避免复杂的公式推导, 借由 Matlab 中的 gatool 工具箱计算即可。假设:

$$\begin{cases} f_1 = (b_1^2 + a_1^2 + R^2 - 2a_1b_1 \cos \theta + 2b_1R \sin \theta \cos \theta \cos \psi - 2a_1R \sin \theta \cos \psi - 2b_1R \sin \theta \cos \theta)^{\frac{1}{2}} - q_2 \\ f_2 = (b_2^2 + a_2^2 + R^2 - 2a_2b_2 \cos \psi - 2a_2R \sin \theta \sin \psi + 2b_2R(\sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi \cos \psi + \cos^2 \theta \sin \psi))^{\frac{1}{2}} - q_3 \end{cases} \quad (15)$$

基于遗传算法, 适应度函数 $f = f_1^2 + f_2^2$ 。 $\sin \theta$ 和 $\sin \psi$ 为变量。结构参数设置: $R=260, a_1=150, a_2=150, b_1=150, b_2=100$ 。求解器设置: 求解器采用 ga-Genetic Algorithm 进行求解; 变量数为 2; 2 个变量的范围为 $[-1, 1]$ 。通过位置正解方程与遗传算法可得正解算例见表 2。

由表 1 与表 2 中数据可知, 表 1 与表 2 前后比较, 得到第 5 组数据误差最大, 为 2.18%, 最大误差的数据较小, 正反解数据比较吻合, 说明了正反解的正确性。 $q_2=q_3=300$ 时的迭代曲线见图 2, 由图 2 可知在迭代到 100 代之前时就停止运行, 说明误差已经达到系统要求的误差之下。最佳个体的大小也在图 2 中可以看到为 -0.267 和 0.31。多样性值与每代个体得分见图 3。多样性值指每一代得分的多少, 每代个体得分顾名思义为每代中个体所得分数。

表2 运动正解算例

Tab.2 An example of positive kinematic solution

q_2	q_3	$\sin \theta$	$\sin \psi$
300	300	-0.267	0.31
290	310	-0.2	0.405
310	290	-0.333	0.218
270	270	-0.067	0.051
260	240	0	-0.26

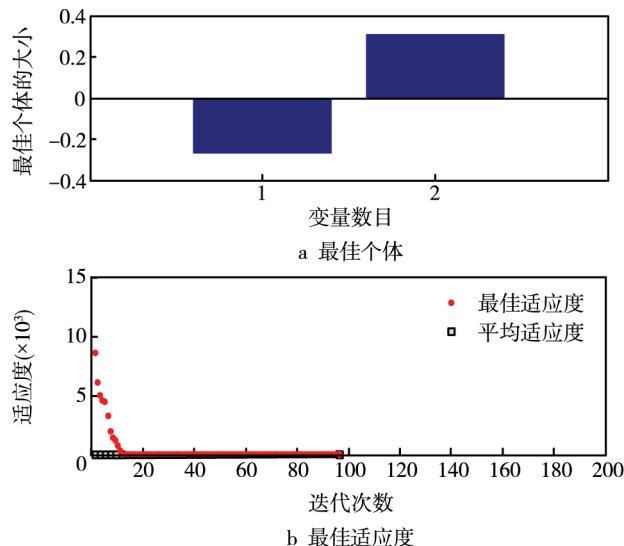


图2 最佳个体与最佳适应度

Fig.2 Best individual and best fitness

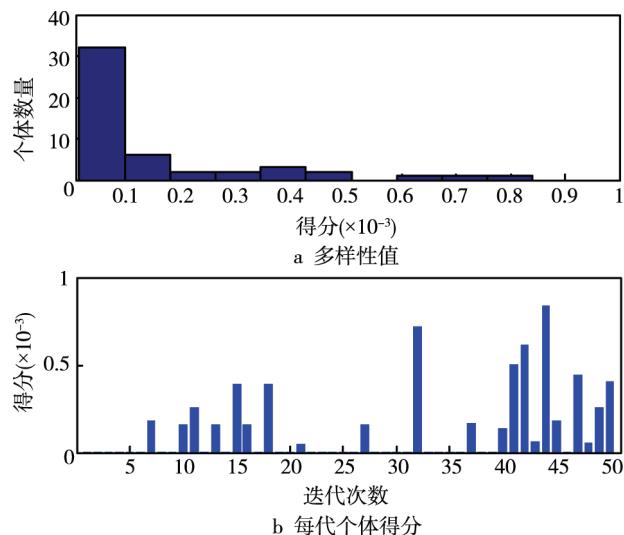


图3 多样性值和每代个体得分

Fig.3 Diversity value and scores of individuals of each generation

4 结语

对 UPS+UPR+S 并联机构的伴随运动进行了分析, 得到该机构在 z_1 方向不存在伴随转动运动, 机构性能较好。对该机构进行正逆解分析, 得到了正解与逆解的方程。通过遗传算法得到了机构的正解, 与反解相互验证, 验证了正逆解的正确性。

参考文献:

- [1] 罗庆生, 刘祎伟, 牛锴, 等. 新型轮腿式机器人研究[J]. 大连理工大学学报, 2011, 51(S1): 88—92.
LUO Qing-sheng, LIU Yi-wei, NIU Kai, et al. Research on a New Type of Wheeled Legged Robot[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2011, 51 (S1): 88—92.
- [2] NIE Song-hui, LI Bin. Kinematic Configuration Analysis of Planar Mechanisms Based on Basic Kinematic Chains[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46 (10): 1327—1334.
- [3] IBRAHIM O, KHALIL W. Inverse and Direct Dynamic Models of Hybrid Robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010(45): 627—640.
- [4] THANH T D, KOTLARSKI J. Dynamics Identification of Kinematically Redundant Parallel Robots Using the Direct Search Method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 55(52): 277—295.
- [5] 牛晓辉, 孙江宏, 潘尚峰, 等. 3-PUPU 并联机器人运动学分析[J]. 机械传动, 2016(6): 12—17.
NIU Xiao-hui, SUN Jiang-hong, PAN Shang-feng, et al. Kinematic Analysis of 3-PUPU Parallel Robot[J]. Mechanical Drive, 2016(6): 12—17.
- [6] 沈惠平, 张震, 杨廷力, 等. 3T1R 并联机构结构降耦设计与其运动学分析[J]. 农业机械学报, 2017, 48 (10): 1—12.
SHEN Hui-ping, ZHANG Zhen, YANG Yan-li, et al. Structural Decoupling Design and Kinematic Analysis of 3T1R Parallel Mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48 (10): 1—12.
- [7] LEE W, WEI C, CHUNG S C. Development of a Hybrid Rapid Prototyping System Using Low-cost Fused Deposition Modeling and Five-axis Machining[J]. Robotics and Computer-integrated Manufacturing, 2013, 29(6): 439—448.
- [8] 白龙, 孙牧原, 崔国华, 等. 三平动并联机构动力学建模与工作空间分析[J]. 包装工程, 2015, 36(23): 88—93.
BAI Long, SUN Mu-yuan, CUI Guo-hua, et al. Dynamics Modeling and Work Space Analysis of Three Translational Parallel Mechanism[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(23): 88—93.
- [9] 池腾腾, 王南, 周莎莎, 等. 一种并联机构运动副摆放位置不同的静力学分析[J]. 包装工程, 2016, 37 (17): 157—161.
CHI Teng-teng, WANG Nan, ZHOU Sha-sha, et al. Statics Analysis of A Parallel Mechanism with Different Placement Positions[J]. Packaging Engineering, 2016, 37(17): 157—161.
- [10] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学(第2版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
HUANG Zhen, ZHAO Yong-sheng, ZHAO Tie-shi. Advanced Spatial Mechanism(Second Edition)[M].

- Beijing: Higher Education Press, 2014.
- [11] 程世利. 并联机构若干基本问题的研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2011.
CHENG Shi-li. Research on Some Basic Problems of Parallel Mechanism[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2011.
- [12] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70—80.
SHEN Hui-ping, YIN Hong-bo, WANG Zhen, et al. Research on Forward Position Solutions for 6-SPS Parallel Mechanisms Based on Topology Structure Analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 70—80.
- [13] 吴小勇, 谢志江, 宋代平, 等. 基于改进蚁群算法的 3-PPR 并联机构位置正解研究[J]. 农业机械学报, 2015, 46(7): 339—344.
WU Xiao-yong, XIE Zhi-jiang, SONG Dai-ping, et al.
- Forward Kinematics of 3-PPR Parallel Mechanism Based on Improved Ant Colony Algorithm Transactions of the Chinese[J]. Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(7): 339—344.
- [14] 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报, 2015, 51(9): 28—36.
GENG Ming-chao, ZHAO Tie-shi, WANG Chang, et al. Direct Position Analysis of Parallel Mechanism Based on Quasi-Newton Method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(9): 28—36.
- [15] 石梦蕊, 赵新华. 基于遗传算法的三平动 3-PRRR 并联机器人正解位形的研究与仿真[J]. 天津理工大学学报, 2017, 33(2): 6—11.
SHI Meng-rui, ZHAO Xin-hua. The Forward Kinematic Analysis and Simulation of 3-PRRRR Translational Parallel Manipulator Based on Genetic Algorithm[J]. Journal of Tianjin University of Technology, 2017, 33(2): 6—11.