

## 包装技术与工艺

## 包装振动能量采集器非线性拾振结构响应分析

李丹晖<sup>1</sup>, 王军<sup>1,2</sup>

(1.江南大学, 无锡 214122; 2.江苏省食品先进制造装备技术重点实验室, 无锡 214122)

**摘要:** **目的** 以振动能量采集器的拾振结构为研究对象, 分析阻尼比、频率、非线性系数、弹性系数和激励振幅对振动响应特性的影响。**方法** 首先对拾振结构建立其物理系统模型, 建立模型的动力学方程并进行理论计算。然后, 用同伦分析法(HAM)对其响应特性进行计算分析, 得到理论计算结果。最后, 通过 Matlab 绘制振动特性基本曲线, 得到模拟分析结果。**结果** 非线性系数对振动响应特性的影响较小; 减小弹性系数、增加阻尼比、控制系统频率和激励振幅, 可以增大响应振幅。**结论** 为振动能量采集器拾振结构的优化设计提供理论依据。

**关键词:** 振动能量采集; 拾振结构; 同伦分析法; 响应幅值

**中图分类号:** TB485.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2017)03-0028-05

## Response of Vibration Energy Harvester's Nonlinear Vibration Pickup Structure for Packaging System

LI Dan-hui<sup>1</sup>, WANG Jun<sup>1,2</sup>

(1.Jiangnan University, Wuxi 214122, China;

2.Jiangsu Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment &amp; Technology, Wuxi 214122, China)

**ABSTRACT:** The work aims to analyze the effect of damping ratio, frequency, nonlinear coefficient, elasticity coefficient and excitation amplitude on the vibration response characteristics, with the vibration energy harvester as the research object of the vibration pickup structure. First, the physical system model of the vibration pickup structure and the dynamic equation were established, and the theoretical calculation was conducted. Then, homotopy analysis method (HAM) was used to calculate and analyze its response characteristics, so as to obtain the theoretical calculations. Finally, MATLAB was adopted to draw the basic curve of vibration characteristics, so as to obtain the simulated analysis results. Nonlinear coefficient had little effect on the vibration response characteristics. The response amplitude could be increased by reducing the elasticity coefficient, increasing the damping ratio, and controlling the system frequency and excitation amplitude. This will provide a theoretical basis for optimization design of vibration energy harvester's vibration pickup structure.

**KEY WORDS:** vibration energy harvester; vibration pickup structure; homotopy analysis method; vibration amplitude

随着现代物流业的发展, 运输包装越来越受到人们的重视。在运输过程中, 包装振动产生的能量不容忽视, 如果将该能量进行收集并加以利用, 必将造福社会。能量采集器作为一种可替代电池, 将环境中存在的能量回收并转化为电能, 可成为维持自我供电的新型电源,

因此越来越受到重视<sup>[1]</sup>。基于物流运输过程中产生的振动能量, 采用电磁式振动能量采集器<sup>[2-5]</sup>将其能量进行收集, 相比于压电式和电容式振动能量采集器, 其优势<sup>[6-7]</sup>在于体积较小、感测频率较高、工艺可与半导体技术兼容、无需外界驱动、可在各种恶劣环境中使

收稿日期: 2015-10-29

基金项目: 江苏省自然科学基金 (BK20151128); 江苏省重点实验室开放基金 (FM-201403)

作者简介: 李丹晖 (1990—), 女, 江南大学硕士生, 主攻运输包装。

通讯作者: 王军 (1982—), 男, 博士, 江南大学教授, 主要研究方向为运输包装与冷链物流。

用等。传统的能量采集器的拾振结构物理模型多假设为线性弹簧<sup>[8-10]</sup>，但在实际应用中，其大多数弹簧具有非线性特征。文中主要分析能量采集系统拾振结构的振动特性，通过同伦分析法得到振动响应方程，并针对阻尼系数、频率比对响应的影响进行理论分析和 Matlab 分析，得到的计算结果与模拟结果相一致。

## 1 理论计算

### 1.1 拾振系统物理模型及动力学方程建立

最早研究振动能量采集的是 Williams 等<sup>[11]</sup>，他们利用弹簧-质量块阻尼振动模型，研究振动能量与电能之间的转换问题，该模型是基于线性系统理论建立的。文中所建立的模型是基于非线性系统理论，进一步研究其振动响应特性。文中的非线性拾振系统物理模型可以简化为弹簧-质量块系统，模型见图 1。

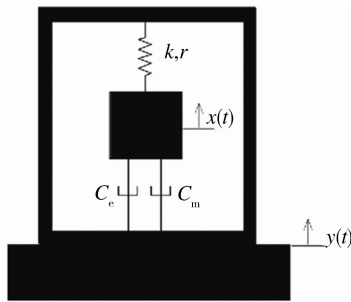


图 1 弹簧-质量块拾振系统模型  
Fig.1 Spring-mass vibration model

弹簧-质量块拾振系统模型中的弹簧为三次非线性，由永磁体（质量为  $m$ ）、平面弹簧和壳体组成，永磁体作用是产生磁场，平面弹簧用于拾振，其弹性系数为  $k$ ，非线性系数为  $r$ ，机械阻尼为  $c_m$ ，电气阻尼为  $c_e$ ，壳体位移为  $y(t)$ ，质量块位移为  $x(t)$ 。能量转换过程中，机械能向电能转换是通过电气阻尼实现的<sup>[12]</sup>。为了更好地分析其能量采集系统的特性，设机械阻尼比为  $\zeta_m$ ，电气阻尼比为  $\zeta_e$ ，总阻尼比为  $\zeta$ ，其中  $\zeta = \zeta_m + \zeta_e$ 。由图 1 可知，该系统动力学方程为：

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) + r(x - y)^3 = 0 \quad (1)$$

式中： $c = c_m + c_e$ 。

令  $v = \frac{x - y}{D}$ ， $u = \frac{y}{D}$ ， $\tau = \frac{t}{T}$ ， $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$ ， $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ ， $f = \frac{\omega}{\omega_n}$ ， $H = f^2$ ， $\dot{v} = \frac{dv}{d\tau}$ ， $\ddot{v} = \frac{d^2v}{d\tau^2}$ ， $\dot{u} = \frac{du}{d\tau}$ ， $R = \frac{D^2}{k} \cdot r$ ， $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ 。其中  $D$  为平面弹簧的厚度， $T$  为弹簧振动周期， $f$  为频率比。

将式(1)无量纲化：

$$\ddot{v} + 2\zeta\dot{v} + v + Rv^3 = H\sin(f\tau) \quad (2)$$

重新定义一个新的变量：

$$v(\tau) = Az(\tau) \quad (3)$$

式中： $A$  为响应幅值。

那么：

$$A\ddot{z}(\tau) + 2\zeta A\dot{z}(\tau) + Az(\tau) + RA^3z^3(\tau) = H\sin(f\tau) \quad (4)$$

主共振的稳态周期解可表示为：

$$z(\tau) = \{c_1 n \cos[(2n+1)(f\tau + \varphi)] + c_2 n \sin[(2n+1)(f\tau + \varphi)]\}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

### 1.2 同伦分析法求解响应方程

“同伦分析方法”<sup>[13]</sup>最早是由廖世俊教授在 1992 年的博士论文中提出来的。目前，国内外许多研究人员都采用“同伦分析方法”来研究强非线性问题。原培新<sup>[14]</sup>等为了研究强非线性系统的主共振问题，采用同伦分析法研究其在谐波激励下的响应，并通过 2 个具体算例，验证了同伦分析法的精确性。文中采用同伦分析法来研究三次非线性振动系统的响应特性，并用 Matlab 对结果进行验证，得到同伦分析法的高精确性。通过同伦分析法求得的响应解为：

$$H^2 = (A_0 f^2 - A_0 - \frac{3}{4} R A_0^3)^2 + (2\zeta A_0 f)^2 \quad (6)$$

$$\varphi_0 = \arctan \frac{4 - 4f^2 + 3R A_0^3}{8\zeta f} \quad (7)$$

可得初始近似解表达式：

$$\dot{z}_1 + z_1 = \frac{1}{4} h R A_0^3 \cos 3T \quad (8)$$

因初始条件  $z_1(0) = 0$ ， $\dot{z}_1(0) = 0$ ，所以初始近似解为：

$$z_1 = \frac{h R A_0^3}{32} \cos T - \frac{h R A_0^3}{32} \cos 3T \quad (9)$$

式中： $h$  为同伦分析法中的非零辅助参数。此时，频率比为：

$$f \approx \sqrt{1 + \frac{3}{4} R A_0^2} \quad (10)$$

对应振幅最大值  $A_0 \approx -\frac{H}{2\zeta f}$ 。同理，考虑二阶方程，可得二阶响应幅值表达式：

$$A_1 = \frac{3hR^2 H(1 - f^2 + \frac{3}{4} R A_0^2)}{256\zeta f [4\zeta^2 f^2 + (f^2 - 1 - \frac{3}{4} R A_0^2)^2]} \quad (11)$$

假设  $h=1$ ， $R=1$ ，则：

$$\frac{A_1}{H} = \frac{-3(1 - f^2)}{256\zeta f [4\zeta^2 f^2 + (f^2 - 1)^2]} \quad (12)$$

因为  $v(\tau) = Az(\tau)$ ，所以：

$$v(\tau) = A_1 z_1(\tau) = A_1 \left( \frac{h R A_0^3}{32} \cos T - \frac{h R A_0^3}{32} \cos 3T \right) \quad (13)$$

式(13)即同伦分析法得到的响应表达式。

## 2 动态响应分析

### 2.1 阻尼比及频率的影响

分析式(10)可知,当  $A_0=0.5$  时,  $f \approx \sqrt{1 + \frac{3}{4}RA_0^2} = 1.08$ , 此时, 振动响应最大, 得到的  $f$  是通过同伦分析法(HAM)计算分析得到的, 下面以 Matlab 仿真验证同伦分析法求解的精确性和有效性。分析式(7)和式(12), 用 Matlab 得到相频和幅频曲线, 见图 2—3。

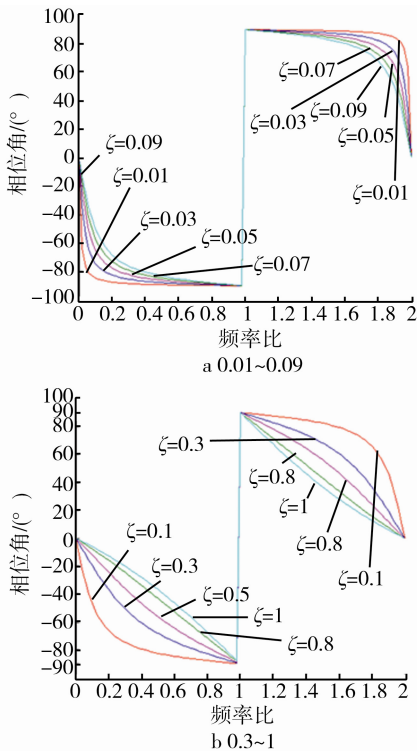


图 2 不同阻尼比时的相频曲线  
Fig.2 Phase- frequency curve of different damping ratio

由图 3 可得, 当  $f=1$  时, 无论阻尼比  $\zeta$  为多少, 系统响应幅值总是等于零; 随着  $\zeta$  的增加, 振幅比越来越小, 当  $\zeta$  确定时,  $f$  在 1~1.2 的范围内,  $f=1.05$  的响应幅值最大, 即达到共振; 随着  $\zeta$  的增加, 振幅比取得峰值处的  $f$  也随之增加, 即阻尼比增加, 共振频率增加, 当阻尼比  $\zeta > 0.1$  时, 阻尼比  $\zeta$  较大, 两者相对运动很小。图 3 中幅频曲线反映的峰值处  $f$  的取值为 1.05~1.08, 与同伦分析法计算分析得到的  $\Omega$  值相一致, 可证明求解精确性。杨冰<sup>[15]</sup>等采用谐波平衡法, 得到三次非线性系统的近似稳态解, 并通过 Matlab 得出幅频曲线。幅频曲线显示在  $f=1.18$  时, 系统能够达到共振, 与文中采用的同伦分析法求解得到的共振频率  $f=1.08$  很接近, 且与 Matlab 模拟分析得到的共振频率十分接近。文献[14]中得到的系统的非线性与线性振动的频响曲线十分相似, 然而, 非线性显示出来的曲线族的共振点并不是直线, 而是偏向

频率增大的方向。研究表明, 三次非线性系统的共振频率不是一成不变的, 而是要受到阻尼等参数的影响。要想得到最大的响应幅值, 必须选取合适的  $\Omega$  值, 因此, 要针对能量采集器的拾振系统和能量采集系统进行优化设计, 从而获得最大的功率。

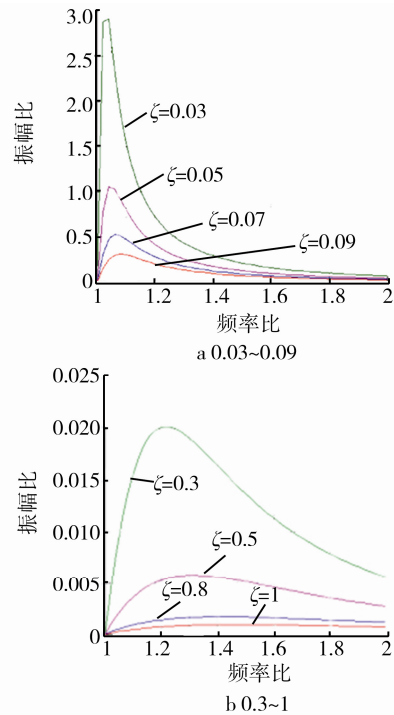


图 3 不同阻尼比时的幅频曲线  
Fig.3 Amplitude-frequency curve of different damping ratio

### 2.2 非线性系数 $r$ 以及刚度系数 $k$ 的影响

在前文中, 为了研究阻尼比  $\zeta$  和频率比  $f$  对振动响应的影响, 设定非线性系数为已知, 即式(11)中取的非线性系数  $R=1$ 。现在固定阻尼比  $\zeta$  和频率比  $f$ , 研究非线性系数  $r$  和弹性系数  $k$  对振动响应的影响。根据式(11), 设定  $\zeta=0.03, f=1.1, D=1$ , 则:

$$\frac{A_1}{H} = \frac{r^2}{0.704(0.84k^2 - 3kr)} \tag{14}$$

分析式(14), 可以得到不同弹性系数时的响应幅值与非线性系数  $r$  的关系, 见图 4。由图 4 可知, 随着非线性  $r$  的增加, 振幅比也不断增加; 当非线性系数  $r$  固定时, 随着弹性系数  $k$  的增加, 振幅比反而减小; 且随着  $k$  的增加, 非线性系数  $r$  对振幅比的影响减弱, 振幅比与  $r$  越来越趋近于线性关系。非线性系数  $r$  对系统响应的影响不是很大。

杨小俊<sup>[16]</sup>等研究基础激励下的三次非线性系统的响应, 研究表明, 在外界激励下, 阻尼很小但三次非线性因子较大时, 会发生所谓的混沌运动, 因此, 可以选择弹性系数较小的弹簧材料。同时, 还要控制三次非线性系数  $r$ , 避免发生混沌响应。综合考虑各种因素影响, 可以得出, 在保证足够响应幅值的前提

下, 非线性系数  $r$  要尽量小。

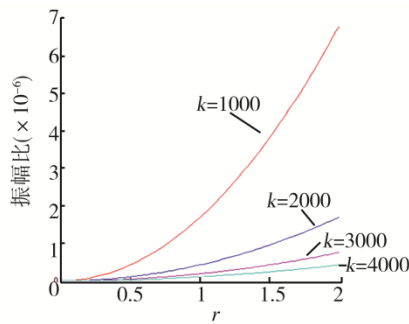


图 4 不同弹性系数时的响应幅值与非线性系数  $r$  的关系  
Fig.4 Relationship between amplitude and nonlinear coefficient with different elasticity coefficient

### 2.3 外界激励幅值的影响

根据式(11)可知, 除了阻尼比  $\zeta$ 、频率比  $f$ 、弹性系数  $k$  及非线性系数  $r$  对响应有影响外, 其外界激励幅值也会对系统响应产生影响。分别取  $\zeta=0.03$ ,  $f=1.1$ ,  $r=0.1$ ,  $k=1000$  来研究外界激励幅值  $H$  对系统响应的影

$$A_1 = \frac{\left(\frac{H^2}{58.08} - 0.21\right)H}{2.816 \times 10^8 \left(0.048456 + \frac{H^4}{58.08^2} - \frac{H^2}{29.04}\right)} \quad (15)$$

响。其他参数确定后, 式(11)可改写为:  
根据式(15)可得激励幅值  $H$  对系统响应的影响, 见图 5。可知,  $H$  在  $0 \sim 0.8$  之间时, 响应幅值  $A$  接近于 0;  $H$  在  $1.6 \sim 2$  之间时, 随着  $H$  的增加, 振幅也趋近于 0。图 5 中有 2 个峰值,  $H=1.18$  时, 达到一个峰值, 方向与激励振幅的方向相反;  $H$  在  $1.18 \sim 1.2$  之间时, 幅值骤变, 先从峰值降到 0, 再从 0 陡增到峰值;  $H=1.2$  时, 响应幅值达到最大, 方向与激励振幅相同。为了达到最大的响应幅值, 需要考虑激励幅值  $H$ , 在实验验证过程中, 要控制  $H$  的大小。

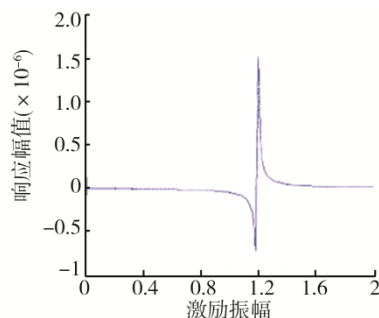


图 5 激励幅值  $H$  对系统响应幅值的影响  
Fig.5 Influence of excitation amplitude  $H$  on system response

## 3 结语

针对能量采集器的拾振结构, 将其平面弹簧考虑为三次非线性进行分析, 更加接近于实际工况。对拾

振结构建立系统模型, 并构建其动力学方程, 采用现有高效的同伦分析法来分析计算方程的响应解, 并对其响应进行了理论分析。综合上述对各参数的分析, 阻尼比  $\zeta$ 、频率比  $f$ 、弹性系数  $k$ 、非线性系数  $r$  和激励振幅  $H$  都对系统响应产生一定的影响, 其中, 非线性系数  $r$  的影响较小, 在结构优化设计时可不予考虑。弹性系数  $k$ 、阻尼比  $\zeta$  和频率比  $f$  对系统响应的影

响较大, 在结构设计优化时, 要注重这几个参数的选取和设置, 以期得到最优的响应幅值。  
为了验证同伦分析法(HAM)求解的精确性, 用 Matlab 绘制幅频和相频曲线, 对幅频和相频曲线进行分析, 得到在频率比  $f=1.05$  时, 振动响应幅值最大, 与理论分析计算得到的  $f=1.08$  时, 振动幅值最大的结论一致, 由此可以证明同伦分析法(HAM)用于求解三次非线性方程具有很高的精确性, 减少了由于计算方法的选取而产生的误差, 为后续能量采集器拾振结构的优化设计提供了有力的理论依据。

### 参考文献:

- [1] 王佩红, 戴旭涵, 赵小林. 微型电磁式振动能量采集器的研究进展[J]. 振动与冲击, 2007, 26(9): 94—111. WANG Pei-hong, DAI Xu-han, ZHAO Xiao-lin. Research Progress of Micro-electromagnetic Vibration Energy Harvester[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(9): 94—111.
- [2] 蓝澜, 何青. 新型微型电磁式振动能量收集器[J]. 中南大学学报, 2013(S): 436—442. LAN Lan, HE Qing. New Micro Electromagnetic Vibration Energy Harvester[J]. Journal of Central South University, 2013(S): 436—442.
- [3] STABLER C. Parametric Instabilities for Vibratory Energy Harvesting under Harmonic, Time-Varying Frequency, and Random Excitations[D]. Clemson: Clemson University, 2010.
- [4] 陈勇, 丁杰雄. 电磁型振动能量收集器研究及发展现状[J]. 微纳电子技术, 2012(8): 534—541. CHEN Yong, DING Jie-xiong. Research and Development of the Vibration Based Electromagnetic Energy Harvester[J]. Micronanoelectronic Technology, 2012(8): 534—541.
- [5] KULAH H, NAJAFI K. An Electromagnetic Micro Power Generator for Low-Frequency Environmental Vibrations[J]. IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, 2004, 19(1): 237—240.
- [6] MOLL F. Review of Energy Harvesting Techniques and Applications for Microelectronics[J]. Proceedings of SPIE: The International Society for Optical Engineering, 2005(7): 359—373.

- [7] GLYNNE-JONES P, TUDOR M J, BEEBY S P, et al. An Electromagnetic, Vibration-Powered Generator for Intelligent Sensor Systems[J]. *Sensors & Actuators and Physical*, 2004(3): 344—349.
- [8] 王佩红. 基于 MEMS 技术的微型电磁式振动能量采集器的研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2010.  
WANG Pei-hong. Study on the Micro Electromagnetic Vibration Energy Harvester Based on MEMS Technology[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2010.
- [9] 丁旭升. 微型电磁式振动能量采集器的研究[D]. 天津: 河北工业大学, 2011.  
DING Xu-sheng. Research on Micro Electromagnetic Vibration Energy Harvester[D]. Tianjin: Hebei University of Technology, 2011.
- [10] 邵玮. 电磁式振动能量采集结构的优化[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012.  
SHAO Wei. Optimal Structure Design for Electromagnetic Vibration Energy Harvester[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- [11] WILLIAMS C B, SHEARWOOD C, HARRADINE M A, et al. Development of an Electromagnetic Micro-generator [J]. *IEEE Proceedings Circuits Devices and Systems*, 2001(8): 337—342.
- [12] TRIPLETT A L. Vibration-Based Energy Harvesting with Essential Non-Linearities[D]. Ohio: The University of Akron, 2011.
- [13] 廖世俊. 同伦分析方法: 研究背景和现状[J]. *科学观察*, 2011(6): 55—58.  
LIAO Shi-jun. Homotopy Analysis Method: Background and Current Status[J]. *Science Focus*, 2011(6): 55—58.
- [14] 原培新, 李永强. 强非线性多自由度动力系统主共振同伦分析法研究[J]. *应用数学和力学*, 2010, 31(10): 1229—1238.  
YUAN Pei-xin, LI Yong-qiang. Study on Primary Resonance of Multi-Degree-of-Freedom Dynamic Systems with Strongly Non-Linearity Using the Homotopy Analysis Method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, 31(10): 1229—1238.
- [15] 杨冰, 卢立新. 基础位移激励下包装系统的非线性振动分析[J]. *包装工程*, 2008, 29(2): 64—66.  
YANG Bing, LU Li-xin. Nonlinear Vibration of Packaging System under Foundation Displacement Excitation[J]. *Packaging Engineering*, 2008, 29(2): 64—66.
- [16] 杨小俊, 奚德昌, 杨明涛, 等. 立方非线性包装系统在基础振动激励下的响应[J]. *包装工程*, 2004, 25(5): 134—136.  
YANG Xiao-jun, XI De-chang, YANG Ming-tao, et al. The Response on Cubic Non-linear Packaging System under Oscillatory Surroundings[J]. *Packaging Engineering*, 2004, 25(5): 134—136.