# 牛顿流体两辊间隙施涂过程的理论建模与分析

# 包能胜<sup>1</sup>, 马婉<sup>1</sup>, 黄学佳<sup>2</sup>

(1.汕头大学, 汕头 515063; 2.汕头职业技术学院, 汕头 515063)

摘要:目的 通过理论建模分析涂膜厚度的成型机理,从而实现对涂膜厚度的精确控制。方法 针对牛顿 流体在五辊涂布系统存胶辊与计量辊之间微间隙处的流动过程,在机理分析与适当假设的基础上,建立 流体流动的数学模型,推导出涂膜厚度与其影响因子之间的关系方程,并分析影响液膜厚度的关键因子。 应用 CFD 软件对流体的流动过程进行数值仿真,通过仿真流场对理论模型与理论推导的边界条件及结 果的合理性进行分析。结果 表明理论模型与仿真流场一致,理论结果与仿真结果吻合度较高,该理论 建模具有相当的合理性。理论结果表明,影响涂膜厚度的因素有涂液粘度和表面张力、计量辊转速、辊 径以及辊间间隙,它们与涂膜厚度之间存在较复杂的关系方程。结论 有助于在工程实际中快速找到获 得理想涂膜厚度的有效工艺参数。

关键词:牛顿流体; 辊式涂布; 两辊间隙; 施涂过程; 理论建模; 涂膜厚度; CFD 中图分类号: TQ537<sup>+</sup>.3 文献标识码: A 文章编号: 1001-3563(2017)01-0031-06

# Theoretical Modeling and Analysis of the Coating Process between Two Rollers of Newtonian Fluid

*BAO Neng-sheng*<sup>1</sup>, *MA Wan*<sup>1</sup>, *HUANG Xue-jia*<sup>2</sup> (1.Shantou University, Shantou 515063, China; 2.Shantou Polytechnic, Shantou 515063, China)

**ABSTRACT:** The work aims to build theoretical modeling to analyze the forming mechanism of coating thickness, so as to accurately control the coating thickness. Based on mechanism analysis and appropriate assumptions, the mathematical model of the flow process of Newtonian fluid at the micro gap between storage roller and metering roller of five-roll coater was established. The relational equation of coating thickness and its influencing factors was derived, and the key factors that affected the liquid film thickness were analyzed accordingly. A numerical simulation of flow process was carried out with CFD software. The rationality of boundary conditions and results derived from theoretical modeling and theories was analyzed through simulation flow field. The results showed that the theoretical modeling was consistent with the simulation flow field. The theoretical results and the simulation results were of higher goodness of fit. Therefore, such theoretical modeling was probably very reasonable. The theoretical results showed that the factors affecting coating thickness were coating liquid viscosity and surface tension, metering roll speed, roller diameter and gap between rollers. These factors and the coating thickness had quite complicated relation equitation. The research results help to find the most appropriate process parameters rapidly to obtain ideal film thickness in engineering practices.

**KEY WORDS:** Newtonian fluid; roll coating; gap between two rollers; coating process; theoretical modeling; coating-thickness; CFD

辊式涂布是所有涂布工艺中通用性最强、成本最低且机械过程最简单的方法之一<sup>[1]</sup>。五辊涂布机是我

国使用最为广泛的涂布设备,然而由于科研条件有 限,我国科研单位和产业界在其涂布机理方面的基础

收稿日期: 2016-08-05

· 31 ·

基金项目:国家自然科学基金(51275281);广东省教育厅项目(2013CXZDC009);汕头大学基金(2014KZDXM035) 作者简介:包能胜(1971—),男,博士,汕头大学教授,主要研究方向为印刷涂布设备的设计理论与方法。

研究基本上是空白的<sup>[2]</sup>。在工程实际中,工人大多通 过经验判断和不断试机来总结出可获得理想涂膜厚 度的参数,这往往需要消耗大量的人力物力,因此, 建立涂膜厚度与辊涂参数之间的理论模型显得至关 重要。关于辊式涂布的理论分析,国外已有一些研究 成果。Greener 等<sup>[3-4]</sup>采用润滑近似理论对牛顿流体 在三辊涂布系统的涂布辊与运动基材之间的流动进 行了理论分析,得到了一个关于基材上的涂膜厚度与 辊涂参数之间的隐式关系式,并分析了参数对厚度的 影响。Savage<sup>[5-6]</sup>同样基于润滑近似理论对牛顿流体 在两顺辊涂布系统的辊隙处的流动作了理论分析,并 依据 2 种不同的边界条件分别建立了分离模型和雷 诺模型,对2种模型的理论结果进行了对比分析,尽 管对比结果显示 2 种数学模型之间的误差很小, 但理 论推导的正确性仍然得不到验证。Chien<sup>[7-8]</sup>等用 CFD 数值模拟方法和实验方法分别对两辊顺涂进行 了研究,结果表明当辊隙大小与涂液的物性参数固定 不变时,涂膜厚度由速比决定,且2种方法之间的结 果误差在 5%~10%。实验法虽可以获得物理量的真 实值,但结果的通用性却比不上理论解析法。

文中用理论解析法建立牛顿流体在五辊涂布系统的 存胶辊与计量辊之间的微间隙处流动的数学模型,同时对 辊隙流场进行 CFD 数值模拟,通过对比,分析了理论建 模的合理性以及理论结果的正确性。两辊间隙涂布建模是 精密无溶剂涂布的基础,而无溶剂涂布机是印刷包装机械 领域的主导产品之一。根据理论模型,文中针对辊涂参数 对涂膜厚度的影响进行讨论。

## 1 两辊微间隙涂布的理论建模

#### 1.1 研究对象

国内涂布工艺最常用的五辊涂布系统见图 1, 它 由存胶辊、计量辊、转移胶辊、涂布辊以及背压辊组 成。存胶辊与计量辊之间的夹缝用来存胶,两辊辊面 之间有一个宽度为 H<sub>0</sub>的微小间隙,涂液流经该间隙 形成涂膜附着在计量辊上,并随着各辊的转动最终涂 覆到基材上<sup>[9]</sup>。通过调整涂布机的间隙、辊间速比或 涂液的物性参数等可以改变涂布量。

对于五辊涂布机,假设涂液在各辊之间完全转移,根据系统质量守恒定律,基材上的最终涂膜厚度 由计量辊上的涂膜厚度与速比*i*决定。速比*i*是可控 参数,由此可见,计量辊上的涂膜厚度是研究五辊无 溶剂涂布的关键。文中以存胶辊和计量辊组成的两辊 微间隙模型为研究对象,见图2,对两辊间隙进行流 场分析,建立流场数学模型,推导计量辊上的涂膜厚 度与其影响因子之间的理论关系。

存胶辊与计量辊辊径相同为 R,存胶辊固定不动,计量辊以速度 u 逆时针转动,计量辊上的涂膜厚

度为 d, 两辊之间的间隙大小为 H<sub>0</sub>。



#### 1.2 模型的假设

为方便理论推导,根据实际情况对模型作如下假 设:与粘性力相比,辊间涂液的体积力(主要是重力) 很小,可忽略不计;两辊间的间隙相对于辊径而言非 常小,且模型的主要研究范围仅限于最小间隙附近, 因此可以忽略速度沿 x 方向的分量;涂液在辊表面无 滑移,沿辊径方向无泄漏;涂液在间隙中的流动是定 常的层流流动;涂液为不可压缩的牛顿流体;辊的轴 向厚度相对辊隙大得多,涂液在存胶辊与计量辊之间 的流动可简化成 2 块无限大的平板之间的粘性流动。

#### 1.3 模型的理论推导

对于两辊微间隙模型, 辊隙流场见图 3。流场坐 标系建立在最小间隙处,坐标原点与存胶辊辊面重 合, y 轴为计量辊运动切线方向, x 轴为两辊轴心连 线, 且指向计量辊方向。



图 3 间隙处的流场分布 Fig.3 Flow field in micro-gap between storage roll and metering roll

按照上述坐标系,存胶辊与计量辊表面可以分别用 *x*=0 和 *x*=*H*(*y*)表示,其中 *H*(*y*)为任意 *y* 坐标处间隙的大小,可近似表示为<sup>[10-11]</sup>:

$$H(y) = H_0 + \frac{y^2}{R} \tag{1}$$

图 3 中, *A*(*x*<sup>\*</sup>,*c*)点是驻点,存胶辊辊面附近的涂 液自该点开始流向计量辊辊面,并形成一个弯液面。 假设弯液面的有效半径近似为*r*,则*H*(*c*)可表示为<sup>[12]</sup>:

$$H(c) = 2r + d \tag{2}$$

与一般流场一样,两辊微间隙模型也使用纳维-斯托克斯方程(以下简称 N-S 方程)来描述涂液的流动,牛顿流体二维 N-S 方程的一般形式为<sup>[13]</sup>:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial u_x}{\partial y})$$
(3)

$$\frac{\partial(\rho u_{y})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_{y} u_{x})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_{y} u_{y})}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + F_{y} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial u_{y}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial u_{y}}{\partial y})$$
(4)

式中:  $u_x$ ,  $u_y$ 分别为涂液在 x, y方向上的速度分量,  $F_x$ ,  $F_y$ 分别为单位质量在 2 个坐标轴方向所受的体积力;  $\rho$ 为涂液密度; p为涂液压力。

根据 2.1 中的模型假设,有  $F_x=F_y=0$ ,  $u_x=0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}=0$ ,  $\rho$  为常数。将假设条件代入 N-S 方程,控制 方程可简化为:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^{n-1} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right]$$
(6)

经过积分可得:

$$u_{y} = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{\frac{1}{k} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}} (x+c_{1})^{\frac{n+1}{n}} + c_{2}$$
(7)

式中:  $c_1$ ,  $c_2$ 是常数, 必须通过关于速度的边界 条件求出。在两辊微间隙模型中, 假设流体圆周方向 无滑移, 则速度  $u_y$ 必然满足下列边界条件<sup>[14]</sup>: 当 x=0时,  $u_y=0$ ; 当 x=H(y)时,  $u_y=u$ 。

将边界条件代入式(7),可得:

$$0 = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{\frac{1}{k} \frac{dp}{dy}} (x)^{\frac{n+1}{n}} + c_2$$
(8)

$$u = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{\frac{1}{k} \frac{dp}{dy}} [x + H(y)]^{\frac{n+1}{n}} + c_2$$
(9)

解方程组可得:

$$u_{y} = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dy} [x^{2} - xH(y)] + \frac{x}{H(y)}u$$
 (10)

式(10)是关于 x 的显函数,同时也是关于 y 的隐 函数,因为式中 dp/dy 与 H(y)均是 y 的函数。从目前 来看, dp/dy 关于 y 的函数是未知的,此时需要引入 系统的质量守恒定律。假设 Q 是液体的体积流量, 根据流体径向无渗透假设,有:

$$Q = \int_0^{H(y)} u_y \mathrm{d}x = ud \tag{11}$$

将(10)式代入(11)式整理可得:

$$\frac{dp}{dy} = \frac{6\mu}{H^{3}(y)} [uH(y) - 2Q]$$
(12)

式(12)即推导出的两辊微间隙理论模型,结合边 界条件可以对该模型进行求解。

#### 1.4 理论模型的求解

在计量辊转动的过程中,两辊间隙上方有注胶管 不断供给涂液,使夹缝始终保持充满液体的状态,因 此可以假设半无限区域  $-\infty \le y \le c$  内是涂液。在  $y = -\infty$ 处,压力为空气压力,A 点为气液交界点, 在A 点处压力与液体表面张力平衡。A 点作为压力分 布的终点,同时也是驻点(下文中通过数值仿真对A 点进行详细分析),在 $A(x^*,c)$ 点处有压力边界条件和 速度边界条件。

压力边界条件为:

$$P(-\infty) = 0 \tag{13}$$

$$P(c) = -\frac{T}{r} \tag{14}$$

式中: *T* 为液体的表面张力。 速度边界条件为:

$$u = 0 , \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

将速度边界条件式(15)代入式(10),可得:

$$\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dy}[x^2 - xH(c)] + \frac{x}{H(c)}u + u_1 = 0$$
(16)

$$\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dy}[2x - H(c)] + \frac{1}{H(c)}u = 0$$
(17)

$$x^{*} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}(c) = \frac{2\mu u}{H^2(c)} \tag{19}$$

又将 A 点坐标代入式(12)得:

顅

$$\frac{dp}{dy}(c) = \frac{3\mu u [H(c) - d]}{H^{3}(c)}$$
(20)

联立式(19)—(20),可以得到 d 与 H(c)的关系:

$$d = \frac{1}{3}H(c) \tag{21}$$

因为
$$H(y) = H_0 + \frac{y^2}{R}$$
,可得:  
 $c = \sqrt{(3d - H_0)R}$  (22)

又由于 
$$H(c) = 2r + d$$
,所以:  
 $r = \frac{1}{2}[H(c) - d] = d$  (23)

为」简化计算,引入一个尤量纳参数
$$\xi$$
,使  
 $\xi = \frac{d}{H_o}$ ,那么:

$$c = \sqrt{3\xi - 1}\sqrt{RH_0} \tag{24}$$

$$r = d = \xi H_0 \tag{25}$$

$$Q = ud = u\xi H_0 \tag{26}$$

至此,两辊微间隙流动的理论模型可整理为:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{6\mu u}{H(y)} [H(y) - 2\xi H]$$
<sup>(27)</sup>

$$p(-\infty) = 0 \tag{28}$$

$$p(c) = -\frac{T}{r} \tag{29}$$

将约束条件代入理论模型式(27),解出涂膜厚度 *d*与其影响因素的关系函数。

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{dp}{dy} dy = p(c) - p(-\infty) = -\frac{T}{r}$$
(30)

可得:

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{(1+\frac{y^{2}}{RH_{0}})^{3}} [(1+\frac{y^{2}}{RH_{0}})-2\xi] dy = -\frac{1}{6} \frac{TH_{0}}{\mu u \xi} (31)$$
  
$$\Leftrightarrow y = \sqrt{RH_{0}}Y, \quad c = \sqrt{RH_{0}}C, \quad [M]:$$
  
$$\xi \int_{-\infty}^{C} \frac{1}{(1+Y^{2})^{3}} [(1+Y^{2})-2\xi] dY = -\frac{1}{6} (\frac{T}{\mu u} \sqrt{\frac{H_{0}}{R}})$$
(32)

$$\beta = \frac{T}{\mu u} \sqrt{\frac{H_0}{R}}$$
(33)

β 是系统毛细准数<sup>[14-15]</sup>。 则式(32)可化简为:

$$\xi \int_{-\infty}^{C} \frac{1}{\left(1+Y^{2}\right)^{3}} \left[ \left(1+Y^{2}\right) - 2\xi \right] \mathrm{d}Y = -\frac{1}{6}\beta$$
(34)

## 2 数值仿真与分析

#### 2.1 数值仿真

使用 Fluent 软件对两辊间隙处的流场进行数值 仿真。模型的网格用 Gambit 软件划分,计量辊辊面 附近及辊隙处的网格必须致密均匀,因此采用分块划 分法,见图 4。



图 4 模型网格和辊隙处网格 Fig.4 Mesh model of two-roll coating system

Fluent软件用限容积法求解控制方程,选择分离 隐式非定常求解器,控制方程时间离散采用一阶隐式 格式,空间离散采用一阶迎风格式。对于自由面的形 成采用几何重建的离散格式,压力方程和动量方程解 耦采用 Simple 算法及欠松弛因子迭代。

#### 2.2 仿真流场分析

对流场进行数值仿真的目的是通过仿真流场来 分析理论推导的合理性。仿真分析在间隙  $H_0=70\mu m$ , 计量辊转速 u=10 m/min,涂液粘度  $\mu=0.5 Pa \cdot s$  的工况 下进行,仿真结果见图 5。



图 5 仿真结果 Fig.5 Simulation results

结合图 5a 和图 5c 可以看出,在 A 点附近,原来 紧贴存胶辊辊面的涂液层脱离壁面, A 点下方的空间 由倒流空气来填充,形成了空气漩涡,脱离壁面的涂 液向右绕过漩涡流向了计量辊辊面,形成了弯液面, 因此,如图 3 的辊隙处流场分布是合理的。

在理论模型的求解中,最重要的环节是确定压力 边界条件和速度边界条件,其中确定速度边界条件的 依据是 A 点为驻点。从仿真结果图 5b 和图 5d 可以看 到,涂液在 A 点处受空气漩涡的阻碍而沿弯液面向计 量辊辊面分流,A 点流速为零,说明 A 点确实是驻点。 由此,进一步证明了理论推导的合理性。

### 3 结果与讨论

#### 3.1 理论模型

式(34)仅包含 2 个无量纲变量  $\xi 和 \beta$ ,可见  $\beta$  是 影响  $\xi$  的唯一变量。 $\xi 和 \beta$  分别表征涂膜厚度以及涂 膜厚度的影响因素,说明影响涂膜厚度的因素包括计 量辊转速 u、液体表面张力 T、液体粘度  $\mu$ 、辊隙大 小  $H_0$ 和辊径  $R_o$ 

从 β-ζ 的关系可以看出, ζ 随 β 的增加而增大, 可见减小辊隙,减小涂液表面张力,减小辊径,增大 涂液粘度或者增大计量辊转速均可以减小涂膜厚度。 在实际的涂布生产中,涂液的物性参数(包括粘度和 表面张力)以及辊的几何参数(辊径)是难以即时调 控的,因此工厂往往希望通过调节辊隙或辊速来获得 理想涂膜厚度,下面分析 H<sub>0</sub>和 u 对涂膜厚度 d 的影 响曲线。

辊隙与涂膜厚度之间近似成线性关系,线性梯度 与其他辊涂参数有关。不同辊隙下 d 随 u 的变化曲线 见图 6,可知,当计量辊转速很小(<3m/min)时,涂膜 厚度随转速的增加而减小,且变化幅度较大,当计量 辊转速超过 5 m/min 时,涂膜厚度几乎不再随转速而 变化,只能通过改变辊隙来调节涂膜厚度。在五辊涂 布系统中,计量辊转速一般要大于 5 m/min,由此可 见,辊隙是影响涂膜厚度的最主要因素。





#### 3.2 理论结果与数值模拟结果对比

为了验证理论模型的结果,文中对几种工况进行

了 CFD 数值模拟。考虑到在涂布生产中,改变涂液 粘度虽然麻烦,但也是可行的,因此也将其作为可控 参数,数值仿真与理论结果对比见表1,除表1中的 辊涂参数外,在数值模拟过程中分别令表面张力 *T*=0.056N/m,辊径 *R*=92mm。

表 1 数值仿真与理论结果对比 Tab.1 Result comparison of numerical simulation and theoretical model

			d/µm		
$H_0/\mu m$	$u/(m \cdot min^{-1})$	$\mu/(Pa \cdot s)$	CFD	理论	误差/%
			结果	结果	
40	10	0.15	25.86	25.33	-2.05
40	15	0.15	25.63	25.25	-1.47
40	20	0.15	25.53	25.21	-1.24
40	20	0.45	25.00	25.14	0.54
40	20	0.9	24.78	25.12	1.35
50	10	0.15	32.37	31.70	-2.08
50	15	0.15	32.11	31.59	-1.63
50	20	0.15	31.94	31.53	-1.27
50	20	0.45	31.29	31.43	0.43
50	20	0.9	30.89	31.40	1.64
60	10	0.15	38.93	38.07	-2.20
60	15	0.15	38.63	37.93	-1.81
60	20	0.15	38.36	37.86	-1.31
60	20	0.45	37.58	37.72	0.36
60	20	0.9	37.21	37.68	1.26
70	10	0.15	45.42	44.46	-2.12
70	15	0.15	45.02	44.28	-1.65
70	20	0.15	44.62	44.19	-0.96
70	20	0.45	43.74	44.01	0.61
70	20	0.9	43.36	43.96	1.39

由表1可知,结果误差不超过±2.5%,说明理论 计算结果与数值仿真结果吻合度较高,两辊微间隙理 论模型具有相当高的正确性。

#### 3.3 理论模型对涂布工艺的指导意义

涂布生产中最常见的需求是通过调节辊涂参数 来获得理想的涂膜厚度,而在所有的辊涂参数中,最 简单易调节的就是辊隙,将涂膜厚度和其他辊涂参数 输入式(34)即可得到辊隙的理论值。依据理论值来调 节辊隙,可大大减少试机工作量。

#### 4 结语

采用理论建模的方法,结合 CFD 数值仿真对涂 液在两辊之间的流动进行了分析,分析结果表明,涂 液的粘度和表面张力、计量辊的转速和辊径以及两辊 之间的间隙均影响最终的涂膜厚度。文中建立了两辊 涂布涂膜厚度与其影响因素之间的关系方程,对五辊 式无溶剂涂布的研究以及涂布生产实际都有一定的 指导意义。

#### 参考文献:

- JOHNSON M. Viscoelastic Roll Coating Flows[D]. Minnesota: University of Minnesota, 2003.
- [2] OWENS M, VINJAMUR M, SCRIVEN L, et al. Misting of Newtonian Liquids in Forward Roll Coating[J]. Industrial and Engineering Chemistry Research, 2011(5): 3212–3219.
- [3] GREENER J, MIDDLEMAN S. Reverse Roll Coating of Viscous and Viscoelastic Liquids[J]. Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals, 1981, 20(1): 63-66.
- [4] GREENER J, SULLIVAN T, TURNER B, et al. Ribbing Instability of a Two-roll Coater: Newtonian Fluids[J]. Chemical Engineering Communications, 1980, 5(1): 73-83.
- [5] SAVAGE M D. Variable Speed Coating with Purely Viscous Non-Newtonian Fluids[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 1983, 34(5): 158–369.
- [6] SAVAGE M D. Mathematical Models for Coating Processes[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1982(1): 443-455.
- [7] CHIEN C H, JANG J Y. Numerical and Experimental Studies of Thin Liquid Film Flow between Two For-

ward-rollers[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2007, 21(11): 1892-1900.

- [8] CARVALHO M S, SCRIVEN L E. Three-dimensional Stability Analysis of Free Surface Flow: Application to Forward Deformable Roll Coating[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 151(2): 534—562.
- [9] SASAKI M, SUSZYNSKI W J, CARVALHO M S, et al. Process Limits in Two-layer Reverse Roll Transfer[J]. Journal of Coatings Technology and Research, 2013, 10(4): 485–492.
- [10] LIU N, WU X N. Analyzing of Solvent-free Compound Technics[J]. World Plastics, 2006, 24(1): 42–45.
- [11] LYUN, GAO D, XU W C, et al. Characteristics of Solventless Lamination Technology and Structure of Equipment Associated with It[J]. China Plastics, 2010, 24(10): 9–16.
- [12] GREENER Y, MIDDLEMAN S. A Theory of Roll Coating of Viscous and Viscoelastic Fluids[J]. Polymer Engineering and Science, 1975, 15(1): 1–10.
- [13] VERSYEEG H K, MALALASEKERA W. An Introduction to Computational Fluid Dynamics[M]. England: Longman Group Ltd., 1995.
- [14] NICOLAODES A, GUNZBURGER M D. Incompressible Computational Fluid Dynamics Trends and Advances[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [15] ANDERSON J. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications[M]. New York: McGraw-Hill Education, 1995.