

双曲正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析

李皓婧, 张敏

(新乡广播电视大学, 新乡 453000)

摘要: **目的** 分析得到双曲正切型无阻尼非线性包装系统跌落冲击的近似解析解, 解决典型工况下双曲正切型非线性包装系统跌落冲击响应求解问题。**方法** 采用 PEM 分析系统的跌落冲击响应, 得到冲击响应的一阶近似解; 通过包装动力学的能量法, 得到无阻尼系统的精确最大位移值; 对近似解进行修正。**结果** 在足够的精度范围内, 修正后的最大位移响应值、最大加速度响应值以及系统响应周期非常接近于龙格-库塔数值解。**结论** 为双曲正切型非线性包装系统跌落冲击响应分析提供了一种新的近似分析方法。

关键词: 双曲正切型非线性; 跌落冲击; 近似解析解; 同伦分析法; 能量法

中图分类号: TB122; TB485.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2016)23-0116-04

Dropping Shock Response of Hyperbolic Tangent Nonlinear Packaging System

LI Hao-jing, ZHANG Min

(Xinxiang Radio and Television University, Xinxiang 453000, China)

ABSTRACT: The work aims to analyze and obtain the approximate analytic solution for dropping shock of hyperbolic tangent undamped nonlinear packaging system, and figure out the solution for the dropping shock response of hyperbolic tangent nonlinear packaging system under typical working conditions. PEM was used to analyze the dropping shock response of the system so as to obtain the first-order approximate solution for shock response. The accurate maximum displacement of undamped system was obtained with energy method of packaging dynamics and the approximate solution was corrected. Within an adequate accuracy range, the maximum displacement response, the maximum acceleration response and the system's response cycle after correction were very close to that obtained by Runge-Kutta method. A new method is provided for approximate analysis of dropping shock response of hyperbolic tangent nonlinear packaging system.

KEY WORDS: hyperbolic tangent nonlinear; dropping shock; approximate analytic solution; homotopy analysis method; energy method

许多学者致力于非线性问题的求解, 提出并发展了许多近似解析算法, 例如谐波平衡法^[1-3]、变分迭代法^[4-6]、同伦分析法^[7-9]等, 这些算法通常都较为复杂。何氏 PEM^[10-12]已被广泛地应用于解决非线性振动问题, 具有简便有效的优点。包装工程领域中, 缓冲材料具有非线性力学特性, 双曲正切型非线性模型是典型非线性模型之一。向红^[13]

等将 L-P 摄动法与包装动力学能量法结合, 以一次渐进解为基础, 得到系统加速度响应, 其加速度峰值及跌落冲击持续时间等结果较为理想。李宏卫等^[14]也将 PEM 中的修正 Lindstedt-Poincare 法与能量法结合, 用于求解三次型非线性包装系统的跌落冲击响应问题。文中采用 PEM 中的簿记参数法, 并结合能量法分析典型工况下双曲正切型非线

收稿日期: 2016-04-18

作者简介: 李皓婧 (1980—), 女, 河南新乡人, 硕士, 高校新乡广播电视大学讲师, 主要研究方向为计算机应用。

性包装系统跌落冲击响应求解问题。所得结果与四阶龙格-库塔数值算法比较可知, 最大位移响应和最大加速度响应相对误差均小于 0.1%, 系统响应周期相对误差为 5.6%, 可以满足工程要求。

1 簿记参数法

一个微分方程中如果不存在任何参数, 何吉欢教授则在原始控制方程中引入了一个簿记参数。考虑以下非线性微分方程:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0 \quad (1)$$

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

将式(1)改写为下列形式:

$$1 \cdot \ddot{x} + 0 \cdot \dot{x} + 1 \cdot (x + x^3) = 0 \quad (3)$$

假设式(1)的解可以表达为关于 p 的幂级数:

$$x = x_0 + px_1 + p^2 x_2 + \cdots \quad (4)$$

式中: p 为一个簿记参数, $p=1$ 。同样假设式(3)中的系数 1, 0 和 1 可以类似地表达为关于 p 的幂级数: $1=1+pa_1+p^2a_2+\cdots$, $0=\omega^2+pb_1+p^2b_2+\cdots$, $1=pc_1+p^2c_2+\cdots$ 。式中: ω 假设为所研究的非线性振动所要求的频率。

2 EM 的基本思想

在非线性系统的跌落冲击问题分析中, 通常使用能量法(EM)来得到系统的最大位移和最大加速度, 但是难以得到系统响应的周期和时间历程^[15]。对于非线性系统的跌落冲击问题, 如果没有系统阻尼, 理想情况下, 当缓冲材料变形达到最大值 x_m 时, 系统的重力势能全部转化为弹性势能。假设包装系统的跌落高度为 h , 产品重量为 W , 系统的重力势能为: $U=Wh$ 。对于非线性包装系统, $f(x)$ 指恢复力, 是且仅是 x 的非线性函数。根据能量法有: $Wh = \int_0^{x_m} f(x)dx$, 代入参数, 计算可得最大位移 x_m 。系统的动态方程为: $m\ddot{x} + f(x) = 0$, 求解可

得最大加速度值 $\ddot{x}_m$ 。

3 PEM 的应用及其修正

对于双曲正切型非线性包装系统, 不考虑系统阻尼, 系统跌落冲击动态方程和跌落冲击初始条件可以表达为:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + F_0 \tanh \frac{k_0 x}{F_0} = 0 \\ x(0) = 0, \dot{x}(0) = \sqrt{2gh} \end{cases} \quad (5)$$

式中: m 为产品质量; F 为产品与缓冲垫相互作用的冲击力; x 为包装系统的位移; k_0 为缓冲材料的线弹性常数; g 为重力加速度; h 为产品跌落高度; $\dot{x}$ 为 x 对时间 t 的连续导数。为了利用 PEM 进行分析计算, 泰勒展开 $\tanh = \frac{k_0}{F_0}x -$

$\frac{k_0^3}{3F_0^3}x^3 + \frac{2k_0^5}{15F_0^5}x^5 + \cdots$, 把正切型非线性微分方程转化为三次-五次型非线性微分方程:

$$m\ddot{x} + k_0 x - rx^3 + qx^5 = 0 \quad (6)$$

系统的恢复力表达为:

$$f(x) = k_0 x - rx^3 + qx^5 \quad (7)$$

引入参数 $k = \varepsilon \omega_0^2$, $\varepsilon = r/k_0$, $a = \sigma \omega_0^2$,

$\sigma = q/k_0$ 和 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$ (频率参数), 系统跌落冲击动态方程和跌落冲击初始条件可以改写为:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - kx^3 + ax^5 = 0 \quad (8)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \sqrt{2gh} \quad (9)$$

虽然在式(14)中含有常数参数, 仍然可以引入一个所谓的簿记参数 p , $p=1$, 把方程的解和系数表达为关于 p 的幂级数: $x = x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots$, $\omega_0 = \omega^2 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots$, $1 = 1 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots$, $k = d_1 p + d_2 p^2 + \cdots$, $a = e_1 p + e_2 p^2 + \cdots$, 代入式(8), 可得式(10)。

$$(1 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots)(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 p + \ddot{x}_2 p^2 + \cdots) + (\omega^2 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots)(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots) - (d_1 p + d_2 p^2 + \cdots)(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots)^3 + (e_1 p + e_2 p^2 + \cdots)(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \cdots)^5 = 0 \quad (10)$$

合并关于 p 的同次项, 可以得到:

$$p^0: \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (11)$$

$$p^1: \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + c_1 \ddot{x}_0 + b_1 x_0 - d_1 x_0^3 + e_1 x_0^5 = 0 \quad (12)$$

联立式(9)和式(11), 可得:

$$x_0(t) = \frac{\sqrt{2gh}}{\omega} \sin(\omega t) \quad (13)$$

参数展开法的一阶近似解中仅包含基频项, 由于截断误差, 基频项的振幅 A_0 被放大, 认作精确

解的振幅 A , 即 $A=A_0$ 。精确解的振幅与频率满足

$$A=\frac{\sqrt{2gh}}{\omega}; \text{ 然而 } A_0 \neq \frac{\sqrt{2gh}}{\omega} \text{ 且应该是 } A_0 < \frac{\sqrt{2gh}}{\omega},$$

所以对于一阶近似解, 有必要令:

$$x_0(t)=A_0 \sin(\omega t) \quad (14)$$

把 x_0 代入式(12), 可得:

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + (b_1 A_0 - c_1 A_0 \omega^2 - \frac{3d_1 A_0^3}{4} + \frac{5e_1 A_0^5}{8}) \sin(\omega t) + (\frac{d_1 A_0^3}{4} - \frac{5e_1 A_0^5}{16}) \sin(3\omega t) + \frac{e_1 A_0^5}{16} \sin(5\omega t) = 0 \quad (15)$$

为了避免 x_1 的解中出现长期项, 需要有:

$$b_1 A_0 - c_1 A_0 \omega^2 - \frac{3d_1 A_0^3}{4} + \frac{5e_1 A_0^5}{8} = 0 \quad (16)$$

如果一阶近似解的精度符合要求, 那么有 $\omega_0^2 = \omega^2 + b_1$, $1=1+c_1$, $k=d_1$, $a=e_1$, 联立可得:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{4} k A_0^2 + \frac{5}{8} a A_0^4} \quad (17)$$

则式(14)的一阶近似解为:

$$x(t) \approx x_0(t) = A_0 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{4} k A_0^2 + \frac{5}{8} a A_0^4} t\right) \quad (18)$$

对式(18)中时间 t 求导, 得到速度表达式:

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\omega_0^2 A_0^2 - \frac{3}{4} k A_0^4 + \frac{5}{8} a A_0^6} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{3}{4} k A_0^2 + \frac{5}{8} a A_0^4} t\right) \quad (19)$$

为了直观地分析方程近似解的精度, 令 $m=10$ kg, $h=0.6$ m, $k_0=500$ N/cm, $r=72$ N/cm³, $q=0.0001$ N/cm⁵, 结合初始条件式(9), 得到振幅 $A=4.3786$ cm, 频率 $\omega=78.3187$ s⁻¹。

由式(8)可得 $\ddot{x}_m = \omega_0^2 x_m - kx_m^3 + ax_m^5$, 得到最大位移 $x_m=A=4.3786$ cm, 最大加速度 $\ddot{x}_m=42.7353g$ 。

对于跌落冲击的动态问题, 利用四阶 Runge-Kutta 法可以得到式(8)的数值解, 系统响应周期 $T=0.07212$ s, 最大位移响应 $x_m=4.724$ cm, 最大加速度响应 $\ddot{x}_m=61.7101g$ 。简化双曲正切型非线性系统 PEM 算法简称 CPEM, CPEM 与 Runge-Kutta 算法的结果对比见表 1, 周期的相对误差为 11.25%, 最大位移和最大加速度的相对误差分别为 7.31%和 25.53%。为了符合工程的需要, 需要对 CPEM 的一阶近似解做进一步的修正简称 CPEM(E)。

表 1 PEM 算法和改进 PEM 能量法修正与 Runge-Kutta 算法的结果对比

Tab.1 Comparison of solution by the CPEM and CPEM(E) with Runge-Kutta method

	R-K	CPEM	CPEM (E)	相对误差/%	
				CPEM与 CPEM(E)与 R-K对比	R-K对比
x/cm	4.724	4.3786	4.7246	7.31	0.01
$\ddot{x}_m/g$	66.610	49.6015	66.660	25.53	0.08
T/s	0.07212	0.08023	0.06808	11.25	5.60

利用EM对CPEM法得到的近似解进行修正, 有:

$$Wh = \int_0^{x_m} (k_0 - rx^3 + qx^5) dx \quad (20)$$

最大位移可通过求解下式得到:

$$2qx_m^6 - 3rx_m^4 + 6k_0x_m^2 - 12mgh = 0 \quad (21)$$

将 $1=1+c_1$, $k=d_1$ 代入式(21), 可得能量法修正后方程的解。

代入参数, 可得能量法修正后振幅 $A_v=4.7246$ cm, 频率 $\omega_v=92.2875$ s⁻¹, 容易得到最大位移响应和最大加速度响应分别为 $x_m=4.7246$ cm, $\ddot{x}_m=66.66g$ 。CPEM(E)法和 Runge-Kutta 算法的结果对比见表 1, 周期的相对误差为 5.60%, 最大位移和最大加速度的相对误差分别为 0.01%和 0.08%。此外, CPEM, CPEM(E)和 Runge-Kutta 算法的系统跌落冲击位移响应、加速度响应分别见图 1。可以看

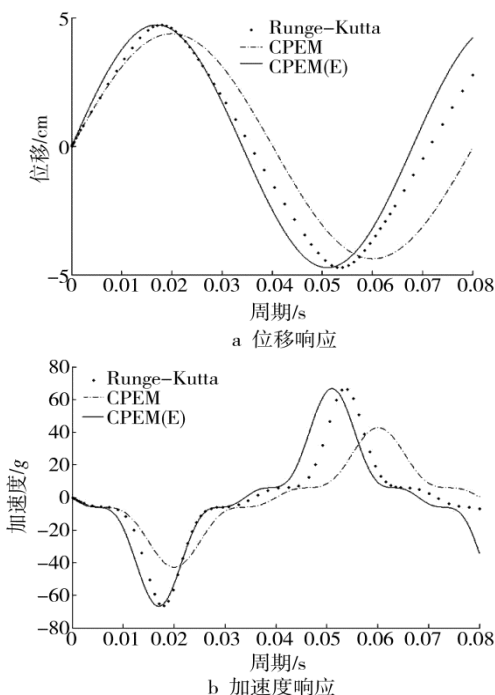


图 1 CPEM 和 CPEM 能量法修正与 Runge-Kutta 算法响应比较

Fig.1 Comparison of the response by the CPEM and CPEM(E) with the numerical simulation solved by the Runge-Kutta method

出 CPEM(E) 的位移响应和加速度响应非常接近 Runge-Kutta 算法, 其精度得到了进一步提高。

4 结语

何氏 PEM 解决振动问题简单有效, 并且可以根据控制方程的具体特点灵活选用修正 Lindstedt-Poincare 法和簿记参数法。由于跌落冲击和自由振动具有不同的初始条件, 何氏 PEM 并不能很好地适用于跌落冲击问题的解决, 因此文中采用修正簿记参数法分析了典型双曲正切型非线性包装系统跌落冲击问题。为了进一步提高近似解析解的精度, 采用包装动力学中的能量法对 CPEM 得到的一阶近似解进行修正。算例结果表明, 能量法修正后的 CPEM 一阶近似解具有足够的精度, 为工程应用提供了一种新的理论分析方法。

参考文献:

- [1] HU H, TANG J H. Solution of a Duffing-harmonic Oscillator by the Method of Harmonic Balance[J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 294(3): 637—639.
- [2] AL-SHYAB A, KAHRAMAN A. Non-linear Dynamic Analysis of a Multi-Mesh Gear Train Using Multi-term Harmonic Balance Method: Sub-harmonic Motions[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 279(1): 417—451.
- [3] PIRMORADIAN M, KESHMIRI M, KARIMPOUR H. Instability and Resonance Analysis of a Beam Subjected to Moving Mass Loading Via Incremental Harmonic Balance Method[J]. Journal of Vibroengineering, 2014, 16(6): 2779—2789.
- [4] HE Ji-huan, WU Xu-hong. Variational Iteration Method: New Development and Applications[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007, 54(7/8): 881—894.
- [5] HE Ji-huan. Variational Iteration Method-some Recent Results and New Interpretations[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2007, 207(1): 3—17.
- [6] 严敏, 陈安军. 跌落工况下斜支承系统响应分析的变分迭代法[J]. 包装工程, 2012, 33(13): 71—74.
YAN Min, CHEN An-jun. Variational Iteration Method for Response Analysis of Inclined Support Packaging System under Dropping Condition[J]. Packaging Engineering, 2012, 33(13): 71—74.
- [7] LIAO Shi-jun. On the Homotopy Analysis Method for Nonlinear Problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 147(2): 499—513.
- [8] 原培新, 李永强. 强非线性多自由度动力系统主共振同伦分析法研究[J]. 应用数学和力学, 2010, 31(10): 1229—1238.
YUAN Pei-xin, LI Yong-qiang. Study on Primary Resonance of Multi-Degree-of-Freedom Dynamic Systems With Strongly Non-Linearity Using the Homotopy Analysis Method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(10): 1229—1238.
- [9] LIAO Shi-jun. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations[M]. London: Springer, 2012.
- [10] HE Ji-huan. Modified Lindstedt-Poincare Methods for Some Strongly Non-linear Oscillations: Part I: Expansion of a Constant[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2002, 37(2): 309—314.
- [11] ZENGİN F Ö, KAYA M O, DEMİRBAĞ S A. Approximate Period Calculation for Some Strongly Non-linear Oscillation by He's Parameter-expanding Methods[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(4): 2177—2182.
- [12] SHOU D H, He Ji-huan. Application of Parameter-expanding Method to Strongly Nonlinear Oscillators[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2007, 8(1): 121—124.
- [13] 向红, 汤伯森. L-P 摄动法在跌落冲击问题中的应用[J]. 振动与冲击, 2002, 21(1): 39—42.
XIANG Hong, TANG Bo-sen. Application of L-P Perturbation Method in Dropping Shock Problem[J]. Journal of Vibration and Shock, 2002, 21(1): 39—42.
- [14] 李宏卫, 王军. 三次型非线性包装系统跌落冲击响应分析[J]. 包装工程, 2015, 36(19): 18—22.
LI Hong-wei, WANG Jun. Dropping Shock Response Analysis of a Cubic Nonlinear Packaging System[J]. Packaging Engineering, 2015, 36(19): 18—22.
- [15] 刘先, 赵星起, 张亮. 一类新的广义非线性变分不等式系统的预解算子算法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2015, 32(5): 1—5.
LIU Xian, ZHAO Xing-qi, ZHANG Liang. Resolvent Operator Algorithm for a Class of New System of General Nonlinear Variational Inequalities[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University(Natural Science Edition), 2015, 32(5): 1—5.