

三平动并联机构动力学建模与 workspace 分析

白龙, 孙牧原, 崔国华, 崔浩洋
(河北工程大学, 邯郸 056038)

摘要: **目的** 以可以实现空间三维平动的3-UPU并联机构为研究对象, 对其进行运动学建模、动力学建模以及 workspace 和动力学仿真。**方法** 通过几何法建立机构的运动学模型, 同时使用拉格朗日方法建立3-UPU并联机构的动力学模型, 最后采用优化后的极限边界搜索法, 建立并分析并联机器人的 workspace, 求解 workspace 的面积。在 workspace 和速度与加速度的约束下, 采用五次样条曲线进行轨迹规划, 利用 Matlab 进行逆运动学与逆动力学建模与仿真。**结果** 通过对动力学建模仿真与 workspace 的分析可知, 该机构有较大和对称的 workspace, 同时拥有相对简单的动力学方程和较好的动力学性能。**结论** 3-UPU 并联机构在工业自动化柔性包装、搬运与加工装配中, 有广泛的应用前景。

关键词: 3-UPU 并联机构; 拉格朗日方法; 极限边界搜索法; 动力学仿真

中图分类号: TB486 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2015)23-0088-06

Dynamics Modeling and Work Space Analysis of Three Translational Parallel Mechanism

BAI Long, SUN Mu-yuan, CUI Guo-hua, CUI Hao-yang
(Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

ABSTRACT: In this paper, the 3 UPU parallel mechanism that can realize three-dimensional translational movement was taken as the study object, the kinematics, dynamics modeling, work space and dynamic simulation of which were conducted to lay the foundation for the engineering application. Through the method of geometry, we built the kinematics model of the mechanism, and meanwhile, established the dynamics model of 3-UPU parallel mechanism using the Lagrange equation method. Finally, the working space of parallel robot was established and analyzed using the optimized limit boundary search method to solve the surface area of the workspace. Under the constraint of the working space as well as the speed and acceleration, the five spline curve was used for trajectory planning, and Matlab was used for the inverse kinematics and the inverse dynamics modeling and simulation. Through the analysis of dynamics modeling simulation and work space, it was found that the mechanism had a large and symmetrical work space, and meanwhile had a relatively simple dynamic equation and a good dynamic performance. In conclusion, 3 UPU parallel mechanism has broad application prospects in industrial automation flexible packaging, handling, processing and assembling.

KEY WORDS: 3-UPU parallel manipulator; Lagrange equation method; limit boundary search method; dynamic simulation

并联机器人具有刚度大、承载力大、精度高等优点, 能够胜任很多包装生产环节中的工作。其中6自由度并联机构具有高度的非线性耦合, 且控制方法复

杂, 在工业自动化、包装工程等领域的应用较少。少自由度的并联机器人, 尤其是三自由度机器人, 在拥有众多并联机器人的优点的同时, 还拥有较大的工作

收稿日期: 2015-06-04

基金项目: 国家火炬计划(2012GH530153)

作者简介: 白龙(1989—), 男, 河北省邢台人, 河北工程大学硕士生, 主攻并联机器人。

通讯作者: 崔国华(1975—), 男, 河北邯郸人, 博士, 河北工程大学教授, 主要研究方向为并联机器人。

空间和简洁的数学模型,同时机构相对简单且成本低,在自动化包装领域具有较好的应用前景。三平动3-UPU并联机构最早由Tisa^[1]提出,并分析了机构的自由度,也使用D-H法建立了正逆运动学模型;Ping等人建立了带补偿的运动学模型,并求解得出了封闭解;Gregorio^[2-3]分析了该机构的奇异性;Mircea等人分析了在关节约束下的纯平动与纯转动工作空间影响指标,并画出了基于蒙特卡洛的工作空间;Han^[4]等人得出了3-UPU对U副间隙与安装误差对动平台运动偏差有较大影响的结论。文中针对自动化包装中需要搬运重物和高精度操作等特殊环节的应用需求,分析求解并联机构的运动学与动力学特性,以为该机构在自动化包装中的应用奠定基础。

1 3-UPU并联机构结构描述

3-UPU并联机构由3条完全相同的U-P-U支链与静动平台组成,见图1。其中P副为驱动副,由带伺服电机的滚珠丝杠组成^[5-6],U副为虎克铰。图1中静平台有铰接点 A_1, A_2, A_3 ,动平台铰接点为 B_1, B_2, B_3 ,外接圆的圆心是坐标系原点,分别是点P与 P_1 ,铰接点以 120° 均匀分布,见俯视图2。

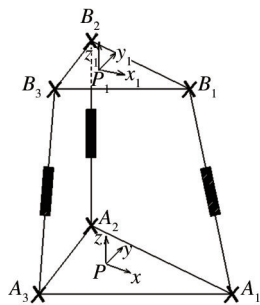


图1 3-UPU机构

Fig.1 Sketch drawing of 3-UPU mechanism

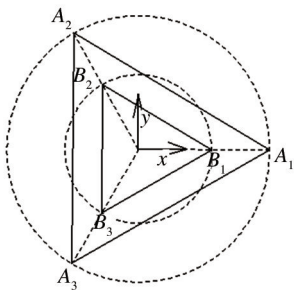


图2 3-UPU俯视图

Fig.2 Overhead view of 3-UPU

3-UPU根据U副的安装方式不同可以分为三平动和三转动两种,当固定于平台的轴平行于静动平台时实现纯移动,如图3的安装方式,当固定于平台的轴垂直于平台时实现纯转动。当上下平台铰链中心交点组成的三角形外接圆半径相同时,机构处于奇异位型^[7],同时当动平台移动到与静平台重合时,位姿也是该机构的奇异位置。根据以上约束条件,机构参数选取如下: $R=0.5\text{ m}, m_4=40\text{ kg}, r=0.2\text{ m}, m_1=45\text{ kg}, l_{\min}=0.4\text{ m}, m_1=20\text{ kg}, l_{\max}=0.7\text{ m}, l_{11}=0.16\text{ m}, \theta_{\max}=2\pi/3, l_{12}=0.19\text{ m}$ 。

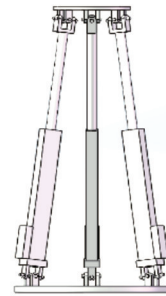


图3 3-UPU并联机构

Fig.3 3-UPU parallel mechanism

2 3-UPU并联机构运动学与动力学模型

2.1 运动学分析

根据坐标变换^[8]求得动平台3个铰接点在静平台的坐标 B_1, B_2, B_3 使用几何法建立3-UPU并联机器人的逆运动学约束方程^[9]如下:

$$l_1 = \sqrt{(R-r-x)^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

$$l_2 = \sqrt{\left(x + \frac{R-r}{2}\right)^2 + \left[y + \frac{\sqrt{3}(R-r)}{2}\right]^2 + z^2} \quad (2)$$

$$l_3 = \sqrt{\left(x + \frac{R-r}{2}\right)^2 + \left[y - \frac{\sqrt{3}(R-r)}{2}\right]^2 + z^2} \quad (3)$$

同时,根据式(1)-(3)可以得到机构的Jacobian矩阵 $J^{[10-11]}$, $v(\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p)$ 为 P_1 点的速度, $\dot{l}(\dot{l}_1, \dot{l}_2, \dot{l}_3)$ 为P副的速度。

$$J = \begin{bmatrix} \frac{x+r-R}{l_1} & \frac{y}{l_1} & \frac{z}{l_1} \\ \frac{[(R-r)/2]+x}{l_2} & \frac{(\sqrt{3}(R-r)/2)+y}{l_2} & \frac{z}{l_2} \\ \frac{[(R-r)/2]+x}{l_3} & \frac{(\sqrt{3}(R-r)/2)-y}{l_3} & \frac{z}{l_3} \end{bmatrix}$$

$$\dot{l} = Jv \quad (4)$$

对式(4)进行求导得到连杆的加速度如下:

$$\ddot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{J}}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{J}}\mathbf{v} \quad (5)$$

2.2 动力学分析

并联机构由于自身的复杂性,建立其动力学系统异常复杂,并联机器人动力学分析的方法有很多,如牛顿-欧拉方法、拉格朗日方法^[12]、凯恩方法等。文中通过运用第二类拉格朗日方程方法建立动力学模型,建立了驱动力与动平台的位移、速度与加速度之间的逆动力学关系。

利用虚位移和达朗伯原理的第二类拉格朗日方程建立相对简洁的动力学方程,避免了求解约束反力,形式统一,应用简便。

求解系统动力学普遍方程如下:

$$F_i + N_i - Q_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

其中: F_i 为主动力; N_i 为约束反力; $Q_i = -m_i a_i$, 为惯性力。

应用虚位移原理,考虑并联机构在平稳系统下,可得到式(7):

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^k \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (7)$$

其中 δq_i 是在约束下广义坐标虚位移,拉格朗日方程中广义坐标与自由度相同,本机构广义坐标是3个杆的长度, $l_i (i=1, 2, 3)$, 广义自由度 $k=3$ 。同时对于理想完整约束下,质点系满足,可到达朗伯方程如下:

$$\sum_{i=1}^n (F_i - m_i a_i) \delta r_i = 0 \quad (8)$$

根据式(7), (8)可得:

$$\sum_{i=1}^n (F_i - m_i a_i) \sum_{j=1}^k \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^n m_i a_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0 \quad (9)$$

其中, $Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} (j=1, 2, 3)$, 为广义力,

$Q_{ij} = - \sum_{i=1}^n m_i a_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} (j=1, 2, 3)$, 为广义惯性力。

广义惯性力可表示为:

$$Q_{ij} = - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}_j} - \frac{\partial T}{\partial l_j} \right) \quad (10)$$

式中 T 为系统的总动能,包括动平台的动能 T_1 和所有连杆的动能 T_2 :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_d v_p^2 = \frac{1}{2} m_d (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2 + \dot{z}_p^2) \quad (11)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{l}_j^2 \theta_j^2 + \dot{L}_j^2) \quad (12)$$

其中, $v_p (\dot{x}_p + \dot{y}_p + \dot{z}_p)$ 为动平台质心的速度; l_j 与 $\dot{l}_j$ 分别为 j 杆的位移和速度; $\dot{\theta}_j$ 为式(5)中 θ 的角速度。

假设系统仅有一个广义虚位移而其他的虚位移保持不变,考虑动平台的重力、杆的重力、驱动力和外力做功,用虚功原理可得式(13):

$$Q_j \Delta q_j = \vec{F} \Delta \vec{r} - m_d g \Delta z - \sum_{k=1}^3 m_l g \Delta z_l m_d + F_j \Delta l_j \quad (j=1, 2, 3) \quad (13)$$

式中, $\vec{F} = F_j \vec{i} + F_j \vec{j} + F_j \vec{k}$, 为平台所受外力; $\Delta \vec{r}$ 为虚位移; m_d 为动平台的质量; m_l 为杆的质量; Δz_l 为杆质心在 z 方向的虚位移; F_j 为对应的 j 杆上的驱动力。

3-UPU 的 P 副采用滚珠丝杠,在杆件的伸长变化时,整体的质心位置改变。当求杆件的势能与动能时,根据下图4计算质心的位置,以质心作为动能与势能变化的参考。

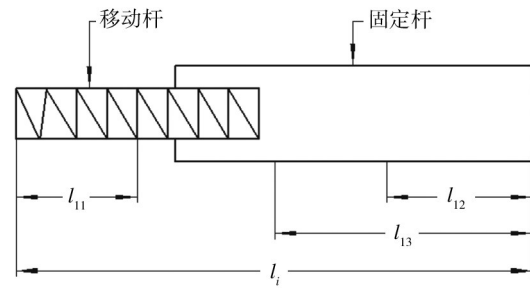


图4 滚珠丝杠简图

Fig.4 Drawing of ball screw

图4中, l_{11} 为移动杆质心到对应 B 铰接点的长度; l_{12} 是固定杆到对应 A 铰接点的长度, l_{13} 是整体杆质心到 A 铰接点的长度; l_i 是杆 i 的总长度。

$$l_{13} = [m_1 (l_{11} + l_{12}) - m_l l_{22} + (m_l - m_1) l_i] / m_i \quad (14)$$

$$\Delta z_p = \Delta l_{13} \cos \theta_i \quad (15)$$

根据式(9)~(15)可化简得到式如下:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \dot{v}_p \\ \dot{y}_p \\ \dot{z}_p \end{bmatrix} \frac{(m_l - m_1) z_p}{m_1} - \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}_1} - \frac{\partial T}{\partial l_1} \right] F_x + \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}_2} - \frac{\partial T}{\partial l_2} \right] F_y + \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}_3} - \frac{\partial T}{\partial l_3} \right] F_z - m_d g \quad (16)$$

由于篇幅原因仅给出了式(16)的结构式,将通过

动平台的轨迹规划得到的位姿、速度和加速度带入式(16),可以求得各连杆的驱动力。上式还可化简为一般式(17)进行动力学分析,其中 $M(q_j)$ 为惯性矩阵, $V(l_j, \dot{l}_j)$ 为哥氏力和离心力向量, $G(l_j)$ 为重力矩阵。

$$M(q_j)\ddot{l}_j + V(l_j, \dot{l}_j) + G(l_j) = F_j \quad (17)$$

3 机构工作空间分析

工作空间的求解方法有蒙特卡洛法、网格法、极限边界搜索法等,使用极限边界搜索法求解工作空间,并使用Matlab画图^[13],可以分析工作空间内部是否中空存在奇异区域,也得到了精确的空间图形与边界数据,作为机构的设计参考,同时边界数据也是并联机构轨迹规划和动力学分析与控制的基础。

采用上节的逆运动学约束方程来求解工作空间,以 $P_1(x_p, y_p, z_p)$ 的3个坐标值作为变量求解得到3个驱动杆 $l_i(i=1,2,3)$ 的值,当 P_1 坐标位姿指定后,对应的3个杆长均在移动范围 $l[l_{\min}, l_{\max}]$ 内,表明此 P_1 点位置在工作空间内。极限边界搜索法原理是建立一个柱形区域,并在 z 轴以 Δz 分为 n 等份圆,每份 xy 截面使用极坐标进行搜索:

$$\begin{aligned} x &= a \cos(m\phi) \\ y &= a \sin(m\phi) \\ z &= z_0 + \Delta z \end{aligned} \quad (18)$$

其中,在 $z=z_i(i=1, \dots, n)$ 时,以 a 与 ϕ 作为变量进行搜索,当求得的3个杆 $(i=1,2,3)$ 采样点值由满足范围到超出范围或由不满足到满足范围时,此时满足条件的 $l_i(i=1,2,3)$ 对应的过渡点 (x_p, y_p, z_p) 是所求的边界点。文中通过Matlab强大的画图功能,画出机构的三维工作空间。

极限边界法所搜索的圆柱参数由Matlab最优工具箱的有约束最小化函数fmincon求得,并使用二次规划法求得工作空间的范围为 $x \in [-366.6667, 366.6667]$, $y \in [-317.5426, 317.5426]$, $z \in [264.5751, 632.4555]$ 。 U 副旋转的角度由各杆件的向量 $\overrightarrow{AB_i}(i=1,2,3)$ 与静平台 z 轴正方向 $\vec{z}(0,0,1)$ 的夹角 θ 表示:

$$\theta_i = \arccos \frac{\vec{z} \cdot \overrightarrow{AB_i}}{|\overrightarrow{AB_i}|} \quad i=1,2,3 \quad (19)$$

通过Matlab求解工作空间,程序流程图见图7。

图6是通过极限边界法画出的工作空间,并经过griddata函数进行散点线性插补法优化生成光滑曲面。通过图5与图6可以看到工作空间的边界与优化工具箱求得的范围相符,同时可以看到工作空间的对

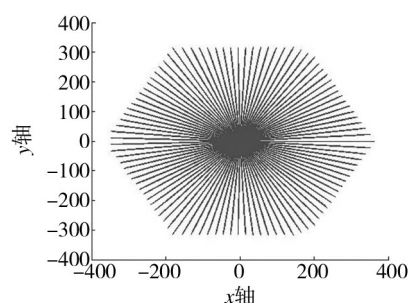


图5 工作空间在 xOy 的俯视图

Fig.5 Top view of xOy workspace

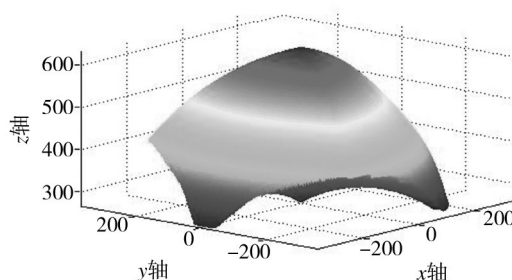


图6 3-UPU工作空间

Fig.6 3-UPU workspace

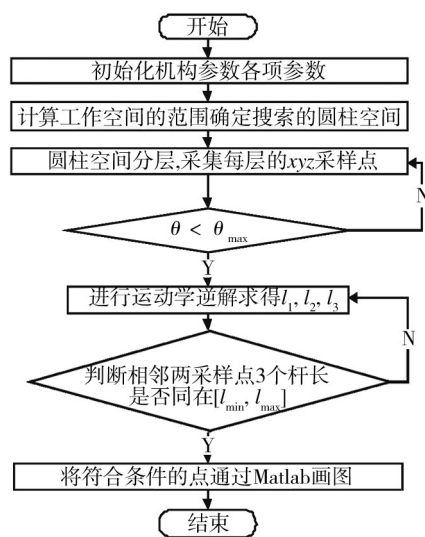


图7 Matlab搜索程序流程

Fig.7 Flow chart of Matlab search program

称性,这与并联机器人的连杆的对称性相关。跟据对称性,利用Matlab的NIT积分工具箱一般区域积分函数求解了工作区间的面积^[14]为 $4.4273 \times 10^7 \text{ mm}^3$ 。

4 机构动力学仿真

采用Matlab进行动力学建模仿真^[15]。假设动平台

为空载,通过工作空间分析得到的数据,动平台的运动轨迹采用螺旋上升曲线见图8,对应的三杆的位移曲线见图9, P_1 点 z 方向的速度采用梯形速度变化,加速度 a 在加速与减速时为固定值。通过采样,使用五次多项式曲线拟合进行轨迹规划^[16],得到3个杆的驱动力曲线见图10。

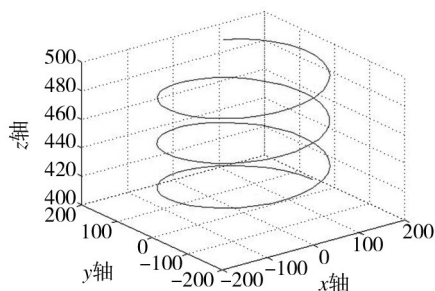


图8 动平台的运动轨迹

Fig.8 Trajectory of moving platform

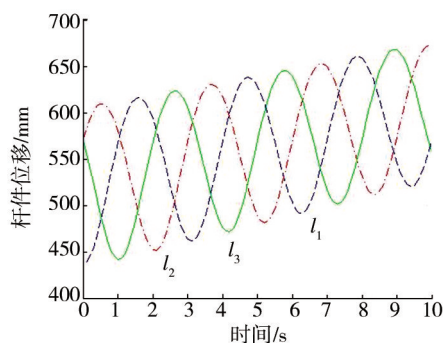


图9 连杆的位移曲线

Fig.9 Displacement curve of rod

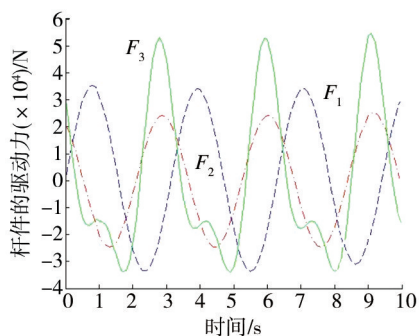


图10 连杆的驱动力变化曲线

Fig.10 The changing curve of rod driving force

5 结语

1) 通过几何法建立3-UPU并联机构的运动学模

型,使用第二类拉格朗日方程建立逆动力学模型。文中采用了优化的极限边界搜索法进行了工作空间分析,利用Matlab进行建模、编程与仿真,同时可以改变结构参数得到不同的工作空间与动力学方程,作为机构的设计与动力学分析的参考。

2) 通过对工作空间的分析与动力学建模仿真,可以看到3-UPU不仅结构简单,而且有相对较大的工作空间和较好的动力学性能,在工业自动化生产线与柔性包装中有很高应用潜力。同时通过建立的动力学模型,为解决U副关节间隙的误差敏感度问题与建立的高级位/力智能控制系统提供了理论基础。

参考文献:

- [1] TSAI L W. Kinematics of a Three-dof Platform with Three Extensible Limbs[M]. Recent Advances in Robot Kinematics. Springer Netherlands, 1996.
- [2] Di GREGORIO R, PARENTI-CASTELLI V. A Translational 3-DOF Parallel Manipulator[M]. Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control. Springer Netherlands, 1998.
- [3] Di GREGORIO R, PARENTI-CASTELLI V. Mobility Analysis of the 3-UPU Parallel Mechanism Assembled for a Pure Translational Motion[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2): 259—264.
- [4] HAN C, KIM J, KIM J, et al. Kinematic Sensitivity Analysis of the 3-UPU Parallel Mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(8): 787—798.
- [5] 赵景山,褚福磊. 机器人机构自由度分析理论[M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [6] 晏祖根,王立权,孙智慧,等. 面向食品生产的高速自动分拣系统的研究[J]. 包装工程, 2009, 30(7): 16—18.
- [7] KONG X, GOSSELIN C M. Kinematics and Singularity Analysis of a Novel Type of 3-CRR 3-DOF Translational Parallel Manipulator[J]. The International Journal of Robotics Research, 2002, 21(9): 791—798.
- [8] 张海强,侯红娟,崔国华,等. 4-UPS-CPC并联机构运动学分析[J]. 机械设计与制造, 2014(8): 48—50.
- [9] 何卫锋,刘吉安,杨曼,等. 两轴驱动并联机构的运动学分析[J]. 包装工程, 2014, 35(5): 139—140.

HE Wei-feng, LIU Ji-an, YANG Man, et al. Motion Analysis of Paralleled Mechanism with Two Axles Driving[J]. Packag-

- ing Engineering, 2014, 27(5):139—140.
- [10] 王耀庭, 马雪梅, 陈安军. 3-PPRR 平移分拣并联机器人的运动学分析[J]. 包装工程, 2010, 31(19):55—59.
WANG Yao-ting, MA Xue-mei, CHEN An-jun. Kinematics Analysis of 3-PPRR Translational Sorting Parallel Robot[J]. Packaging Engineering, 2010, 31(19):55—59.
- [11] 王丹, 杨兰松, 郭辉. 3-RPS 型并联机器人的运动学及动力学分析[J]. 机械设计与制造, 2007(3):120—121.
WANG Dan, YANG Lan-song, GUO Hui. Kinematic and Dynamic Analysis of 3- RPS parallel robot on ADAMS[J]. Machinery Design & Manufacture, 2007(3):120—121.
- [12] 姚莉君. 三自由度平动并联机构的动力学与控制系统研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2012.
YAO Li-jun. Research on Dynamics and Control System of the 3-dof Translational Parallel Mechanism[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012.
- [13] 孟飞. 极限边界搜索实现的并联机构工作空间分析[J]. 制造业自动化, 2006(12):113—115.
MENG Fei. Limit of Search for Analysis of the Working Space of Parallel Mechanism[J]. Manufacturing Automation, 2006(12):113—115.
- [14] LI Y, XU Q. Kinematic Analysis and Design of a New 3-DOF Translational Parallel Manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(4):729—737.
- [15] 段鹏, 何庆中, 王浦全, 等. 白酒包装线搬运机器人轨迹曲线研究[J]. 包装工程, 2014, 35(3):22—24.
DUAN Peng, HE Qing-zhong, WANG Pu-quan, et al. Trajectory Curve of the Liquor Packing Line Moving Robot[J]. Packaging Engineering, 2014, 35(3):22—24.
- [16] 刘凉, 陈超英, 赵新华. 考虑关节摩擦的并联机器人平滑轨迹规划[J]. 机械工程学报, 2014(9):41—43.
LIU Liang, CHEN Chao-ying, ZHAO Xin-hua. Considering the Smooth Trajectory Planning of Parallel Robot with Joint Friction[J]. Mechanical Engineering, 2014(19):41—43.

(上接第 77 页)

- 2000, 21(4):5—8.
WANG Mei. The Research of the Honeycomb Fiber-board Crushing Performance and the Application[J]. Packaging Engineering, 2000, 21(4):5—8.
- [2] 孙玉瑾, 骆光林. 六边形蜂窝芯材异面冲击性能的有限元研究[J]. 包装工程, 2012, 33(17):60—62.
SUN Yu-jin, LUO Guang-lin. Finite Element Analysis of Hexagonal Honeycomb's Out-of-plane Impact Performance[J]. Packaging Engineering, 2012, 33(17):60—62.
- [3] 陈永军, 左孝青, 史庆南, 等. 金属蜂窝的开发、发展和应用[J]. 材料导报, 2003, 17(12):32—35.
CHEN Yong-jun, ZUO Xiao-qing, SHI Qing-nan, et al. Development and Application of Honeycombed Metal[J]. Materials Review, 2003, 17(12):32—35.
- [4] 王堃, 孙勇, 彭明军, 等. 基于 ANSYS 的铝蜂窝夹芯板低速冲击仿真模拟研究[J]. 材料导报:研究篇, 2012, 26(4):157.
WANG Kun, SUN Yong, PENG Ming-jun, et al. Simulation of Low-velocity Impact of Aluminium Honeycomb Sandwich Panels With ANSYS[J]. Mater Rev: Res, 2012, 26(4):157.
- [5] GIBSON L J, ASHBY M F. Cellular Solids: Structure and Properties[M]. Oxford: Pergamon Press, 1988.
- [6] 于江, 李晓娟. 圆形金属蜂窝芯材冲击性能的有限元分析[J]. 包装工程, 2008, 29(11):30—31.
YU Jiang, LI Xiao-juan. Finite Element Analysis on the Impact Performance of Circular Metal Honeycomb Core[J]. Packaging Engineering, 2008, 29(11):30—31.
- [7] RUAN D, LU G, WANG B, et al. In-plane Dynamic Crushing of Honeycombs: A finite Element Study[J]. International Journal of Impact Engineering, 2003, 28(3):161—182.
- [8] 孙德强, 张卫红. 双壁厚蜂窝铝芯的共面冲击力学性能[J]. 振动与冲击, 2008, 27(7):69—74.
SUN De-qiang, ZHANG Wei-hong. In-plane Impact Properties of Aluminum Double-walled Honeycomb Cores[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(7):69—74.
- [9] HU L L, YU T X. Dynamic Crushing Strength of Hexagonal Honeycombs[J]. International Journal of Impact Engineering, 2010(37):467—474.
- [10] ZOU Z, REID S R, TAN P J, et al. Dynamic Crushing of Honeycombs and Features of Shock Fronts[J]. International Journal of Impact Engineering, 2009(36):165—176.
- [11] QIU X M, ZHANG J, YU T X. Collapse of Periodic Planar Lattices under Uniaxial Compression, Part I: Quasi-static Strength Predicted by Limit Analysis[J]. International Journal of Impact Engineering, 2009(36):1223—1230.
- [12] QIU X M, ZHANG J, YU T X. Collapse of Periodic Planar Lattices under Uniaxial Compression, Part II: Dynamic Crushing Based on Finite Element Simulation[J]. International Journal of Impact Engineering, 2009(36):1231—1241.
- [13] WIERZBICKI T. Crushing Analysis of Metal Honeycombs[J]. International Journal of Impact Engineering, 1983, 1(2):157—174.
- [14] YAMASHITA M, GOTOH M. Impact Behavior of Honeycomb Structures with Various Cell Specifications—numerical Simulation and Experiment[J]. International Journal of Impact Engineering, 2005, 32(1—4):618—630.
- [15] 王永宁, 李大永. 铝蜂窝异面变形的数值模拟[J]. 中国机械工程, 2006, 17(增刊):340—343.
WANG Yong-ning, LI Da-yong. Numerical Simulations of Aluminum Honeycomb Out-plane Deformation[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(S1):340—343.