

加筋平托盘面板复杂载荷下最大挠度算法研究

周晓文, 姜献峰, 徐良伟

(浙江工业大学, 杭州 310014)

摘要: 根据板的小变形理论, 结合加筋平托盘的简化模型以及变厚度板的挠度方程, 推导出在地面承载、叉举和上架等 3 种不同工况下加筋平托盘受到复杂载荷时的最大挠度方程。由于载荷函数和弯曲刚度函数都是关于 x, y 的函数, 其求解相当复杂, 因此对其作离散化处理, 离散化的最大挠度方程易于编程, 且为研究平托盘面板结构对最大变形的影响提供了便利的途径。研究表明, 离散化的最大近似挠度方程能够保证精度要求, 其相对误差小于 0.4%。最后展示了该算法的软件应用实例。

关键词: 加筋平托盘; 复杂载荷; 最大变形; 离散化

中图分类号: TB486⁺.01 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2013)17-0041-05

Maximum Deflection Approximate Algorithm of Stiffened Flat Pallet under Complex Load

ZHOU Xiao-wen, JIANG Xian-feng, XU Liang-wei

(Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: According to the theory of small deformation and combining with the simplified model of the pallets and the deformation formula of variable thickness plate, the maximum deflection formula was deduced when the pallet is under complex load of three working conditions (ground-load, fork-lifting, upper carriage). However, the solving process was quite complicated because of the load function and bending rigidity function. Therefore, it is very necessary to discrete the maximum deflection formula. The benefits of discretization are easy to programming and providing a convenient way for researching the influences of panel structure on maximum deformation. The result showed shown that the discrete approximate maximum deflection equation can ensure the precision requirement, and the relative error is less then 0.4%. Finally, the software applications of the algorithm were shown.

Key words: stiffened flat pallet; complex load; maximum deformation; discretization

平托盘是用于集装、堆放、搬运和运输时放置作为单元负荷的货物和制品的水平平台装置, 图 1 为平托盘的整体形状及面板的主要加筋形式。目前的设计思路是先确定平托盘的总体尺寸与板厚, 并通过加强筋的适当配置以提高其承载性能, 使其达到设计要求。江玮等人^[1]利用有限元的方法研究对比了井字形、X 形及蜂窝型加筋板的性能差异, 通过分析计算结果, 构建了在固定加强筋布局形式下的板厚及筋高等参数与托盘性能之间的关系。蒋成建等人^[2]将加筋板作为变厚度板, 利用变厚度薄板的小变形理论, 给出了在加强筋均匀布局情形下的加筋

板结构参数和加筋数量与板的最大变形挠度之间的关系。

目前面向客户需求的塑料平托盘的定制设计也更加普遍, 但对塑料平托盘的定制设计需要综合考虑平托盘的结构和尺寸等各种因素。通过在三维 CAD 软件平台中构建专用的塑料平托盘设计系统, 是一种较好的解决方案。如果在三维 CAD 软件中所设计构建的平托盘及其面板加筋方案, 都需要由有限元方法, 或通过通用计算平台才能计算出最大变形挠度等承载性能, 显然对其专用设计系统的开发要求就会相当高, 同时计算效率也会大大下降。如果能够给出一

收稿日期: 2013-05-03

基金项目: 浙江省科技厅重点工业项目支持(2010C11064)

作者简介: 周晓文(1988-), 男, 浙江湖州人, 浙江工业大学硕士生, 主要研究方向为塑料托盘参数化 CAD/CAE 设计。

种快速简便的计算方法,对加筋平托盘最大变形挠度计算方法中涉及的定积分,可以进行具有一定精度的快速计算,就可以不需要借用有限元软件或通用计算平台。

国内学者对平托盘的结构做了大量研究^[3-4],加筋板几何参数对最大变形的影响是相互联系的,只要协调好筋高、板厚和筋的数量等参数就可以有效地减小加筋板的最大变形。现在面临的问题就是在不同的工况复杂载荷情况下如何快速确定加筋面板的最大变形。

笔者首先根据加筋平托盘的面板结构和载荷情况写出了变厚度板的刚度公式和复杂载荷公式,再根据变厚度板的弯曲变形公式并通过伽辽金法求解出最大挠度公式,并确定地面承载、上架、叉车等 3 种工况下的基函数,然后对最大挠度公式进行离散化处理,最后展示该算法的软件运用实例。

1 加筋平托盘面板模型及最大挠度公式

令面板的中心为原点 O ,设加强筋分布区域为 Ω_1 ,平板分布区域为 Ω_2 ,设面板长为 a ,宽为 b ,厚度为 h_0 ,筋高为 h_1 (见图 1),因此,加筋面板的厚度函数为:

$$H(x,y)=\begin{cases} h_0+h_1 & (x,y)\in\Omega_1 \\ h_0 & (x,y)\in\Omega_2 \end{cases} \quad (1)$$

此时加筋面板的弯曲刚度函数^[5]为:

$$D(x,y)=\frac{EH^3(x,y)}{12(1-\mu^2)} \quad (2)$$

式中: E 为面板的弹性模量; μ 为泊松比。

由于平托盘的最大厚度远远小于面板的长和宽^[5],因此其承载时为薄板变形。在 GB/T 15234—94 测试标准中,规定平托盘堆码实验的弯曲变形量小于 4 mm,其变形量远远小于 1/5 板厚^[6],因此在正常使用下平托盘的变形属于小挠度薄板变形。根据变厚度矩形板变形理论^[7],变厚度板的弯曲变形公式为:

$$D(x,y)\nabla^2\nabla^2w(x,y)=p(x,y) \quad (3)$$

式中: $w(x,y)$ 为薄板挠度函数; $p(x,y)$ 为载荷函数;

$$\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}。$$

对于加筋面板而言,弯曲刚度函数是阶梯函数,筋的数量越多函数分段也越多,积分求解也越复杂。

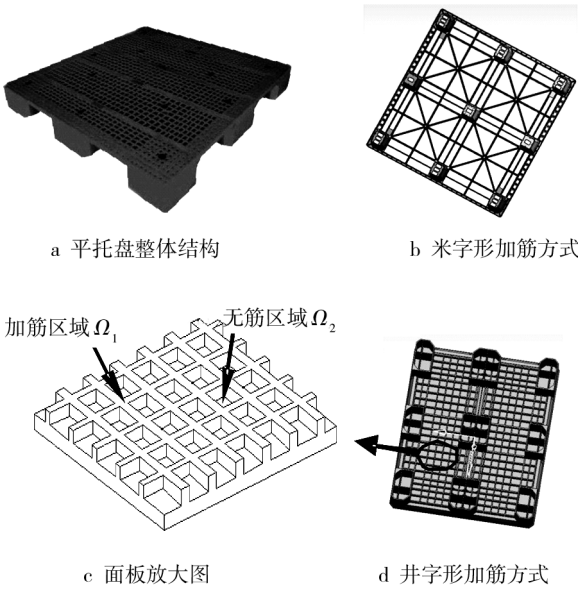


图 1 托盘的加筋形式及面板的局部放大图

Fig. 1 Different stiffened pallet

一般情况下,货物的形状和堆放方式使平托盘面板上的载荷呈区域分布,见图 2,载荷函数 $p(x,y)$ 可表示为:

$$p(x,y)=P_k(x,y) \quad (x,y)\in R_k, k=1\cdots K \quad (4)$$

式中: K 为面板上受到载荷的区域数量; R_k 为载荷区域范围; $P_k(x,y)$ 为第 k 个载荷区域的载荷函数。

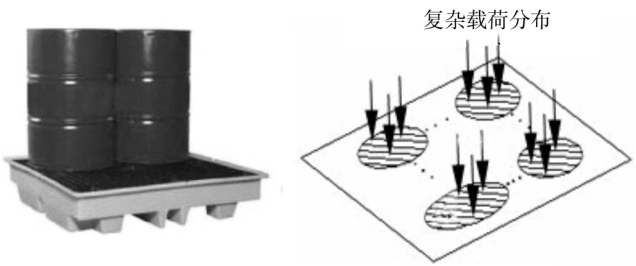


图 2 复杂载荷分布情形

Fig. 2 Distribution of complex load

方程(3)的解可由伽辽金法求得^[8],记:

$$w(x,y)=\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N\alpha_{ij}\psi_{ij}(x,y) \quad (5)$$

式中: $\psi_{ij}(x,y)$ 为满足平托盘在地面承载、上架、叉车等 3 种工况下边界条件的基函数; α_{ij} 为待定常数,由方程组(7)求解得到。特别取 $M=N=1$,则加筋板的近似挠度公式为:

$$w(x,y)=\alpha_{11}*\psi_{11}(x,y) \quad (6)$$

此时, α_{11} 由式(8)表示。若基函数 $\psi_{11}(x, y)$ 的最大值为 1, 则板的最大挠度 $\lambda_A = |\alpha_{11}|$ 。

一般来说, 用 λ_A 表达板的最大挠度已有足够的精度^[8]。当基函数 $\psi_{11}(x, y)$ 与载荷函数 $P_k(x, y)$ 确定时, 公式(8)中的积分可以直接算出, 此时板的最大挠度值也可计算出了。

$$\begin{aligned} & \frac{E}{12(1-\mu^2)} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left[(h_0 + h_1)^3 \iint_{\Omega_1} \psi_{rs}(x, y) \nabla^2 \nabla^2 \cdot \right. \\ & \left. \psi_{ij}(x, y) dx dy + h_0^3 \iint_{\Omega_2} \psi_{rs}(x, y) \nabla^2 \nabla^2 \psi_{ij}(x, y) dx dy \right] \alpha_{ij} \\ & = \sum_{k=1}^K \iint_{R_k} \psi_{rs}(x, y) P_k(x, y) dx dy \\ & \quad (r = 1, \dots, M; s = 1, \dots, N) \quad (7) \\ & \alpha_{11} = \left[\sum_{k=1}^K \iint_{R_k} \psi_{11}(x, y) P_k(x, y) dx dy \right] / \left\{ \frac{E}{12(1-\mu^2)} \cdot \right. \\ & \left. \left[(h_0 + h_1)^3 \iint_{\Omega_1} \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x, y) \psi_{11}(x, y) dx dy + \right. \right. \\ & \left. \left. h_0^3 \iint_{\Omega_2} \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x, y) \psi_{11}(x, y) dx dy \right] \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

托盘的工况主要有地面承载、上架和叉举等 3 种。针对托盘的实际运用工况, 基函数 $\psi_{11}(x, y)$ 可分别取值。

1) 地面承载。取四脚筒支, 且具有对称性, 即

$$\begin{aligned} w(x, y) \Big|_{\substack{(x,y)=(0,0) \\ (x,y)=(0,b/2)}} &= 0, w(x, y) \Big|_{\substack{(x,y)=(a/2,0) \\ (x,y)=(a/2,b/2)}} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=0} &= 0 \text{ 和 } \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0 \end{aligned}$$

则基函数为:

$$\psi_{11}(x, y) = -2\sqrt{3} \left[\frac{x}{a} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{y}{b} \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right] \quad (9)$$

2) 上架。取托盘侧边固定, 且具有对称性, 即

$$w(x, y) \Big|_{x=a/2} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

则基函数为:

$$\psi_{11}(x, y) = -\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (10)$$

3) 叉举。取叉车与托盘的接触区域为固定且接触面积忽略不计。设叉车作用点距板缘的距离为 d , 有:

$$w(x, y) \Big|_{x=a/2-d} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

则基函数为:

$$\psi_{11}(x, y) = -\cos^2\left(\frac{\pi}{a-2d}x\right) \quad (11)$$

2 离散化处理

取面板加筋方式为纵横垂直交错方式, 设横向筋数量为 m , 纵向筋数量为 n , 横向加强筋的厚度为 $c_{h_i} (i=1, \dots, m)$, 纵向加强筋的厚度为 $c_{z_j} (j=1, \dots, n)$, 横向加强筋间距为 $d_i (i=1, \dots, m-1)$, 纵向加强筋间距为 $e_j (j=1, \dots, n-1)$, 面板的加筋结构及剖视图见图 3。

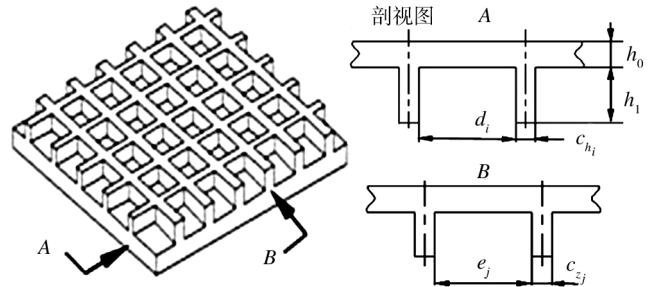


图 3 托盘加筋方式及剖视图

Fig. 3 Panel reinforce style and sectional view

由于分布在面板上的载荷变化及挠度变化比较小且筋的厚度相对较小, 因此可以根据载荷分布情况和面板加强筋分布情况, 对最大挠度公式作离散化处理。离散化处理的思路是将区域积分求得的阴影部分体积近似成底面积与采样点高度的乘积(见图 4)。显然, 当被积函数变化不大时, 这样的近似是可行的。

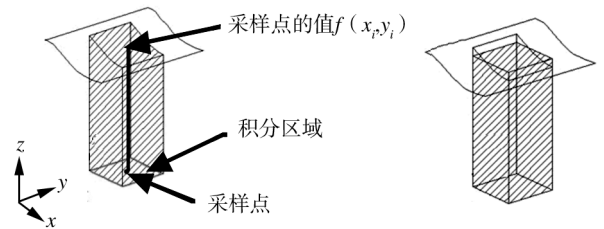


图 4 离散原理

Fig. 4 The principle of discretization

首先对公式(8)的分子进行离散化, 并记离散化结果为 P_d , 得:

$$\begin{aligned} P_d &= \sum_{k=1}^K \iint_{R_k} \psi_{11}(x, y) P_k(x, y) dx dy \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{K_1} \psi_{11}(x_i, y_i) P_k(x_i, y_i) S_i \quad (12) \end{aligned}$$

式中: K_1 为每块载荷区域内采样数量; (x_i, y_i) 为采样点; S_i 为采样面积。

对公式(8) 中分母积分分别作离散化处理,离散化结果分别记为 D_d 和 D_{1d} ,得:

$$D_d = \iint_{\Omega_1} \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x, y) \psi_{11}(x, y) dx dy$$
$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x_i, y_j) \psi_{11}(x_i, y_j) c_{h_i} c_{z_j} +$$
$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x_i, y_j) \psi_{11}(x_i, y_j) d_i c_{z_j} +$$
$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n-1} \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x_i, y_j) \psi_{11}(x_i, y_j) c_{h_i} e_j \quad (13)$$

$$D_{1d} = \iint_{\Omega_2} \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x, y) \psi_{11}(x, y) dx dy$$
$$= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} \nabla^2 \nabla^2 \psi_{11}(x_i, y_j) \psi_{11}(x_i, y_j) d_i e_j \quad (14)$$

式中: (x_i, y_j) 为每个采样区域的中心点。
离散化后最大挠度近似公式为:

$$\lambda_B = \frac{12(1 - \mu^2) P_d}{E[(h_0 + h_1)^3 D_d + h_0^3 D_{1d}]} \quad (15)$$

对 λ_A, λ_B 的计算值进行比较。为简化运算令复杂载荷为简单的均布载荷,且 $p=10$ MPa,取面板厚度 $h_0=20$ mm,筋高 $h_1=50$ mm,筋厚度 $c=10$ mm,面板横向和纵向筋的数量 $m=13, n=13$,筋间距相等。加筋平托盘的材料为高密度聚乙烯,其弹性模量 $E=1$ GPa,泊松比 $\mu=0.35$ 。分别计算 3 种工况下不同尺寸面板 λ_A, λ_B 的值,见表 1。

表 1 λ_B 与 λ_A 的值
Tab. 1 The value of λ_A and λ_B

		面板尺寸 $a(=b)$ /mm				
		600	800	1000	1200	1400
地面	λ_A	0.069	0.277	0.819	1.983	4.183
	λ_B	0.069	0.278	0.82	1.982	4.18
上架	λ_A	0.15	0.595	1.739	4.181	8.778
	λ_B	0.15	0.595	1.739	4.183	8.782
叉举	λ_A	0.5×10^{-4}	0.078	0.673	4.181	14.46
	λ_B	0.5×10^{-4}	0.077	0.672	4.171	14.43

λ_B 与 λ_A 的相对误差分析可以表示为:

$$\text{相对误差} = \frac{|\lambda_A - \lambda_B|}{\lambda_A} \times 100\% \quad (16)$$

λ_B 与 λ_A 的相对误差见表 2。

一般地,平托盘的尺寸范围为(800 mm×800 mm)

表 2 λ_B 与 λ_A 的相对误差
Tab. 2 Relative error of λ_A and λ_B

		面板尺寸 $a(=b)$ /mm					
相对误差/%		600	800	1000	1200	1400	1600
工 况	地面	0.42	0.36	0.21	0.15	0.14	0.22
	上架	0.11	0.04	0.01	0.03	0.04	0.05
	叉举	0.31	0.17	0.12	0.16	0.14	0.01

~(1400 mm×1400 mm)。在此范围内,对 λ_A 离散化产生的相对误差小于 0.4%。

3 在设计软件中的应用实例及分析

离散化的最大挠度公式便于编程,可以实现快速分析加筋塑料平托盘结构参数与最大挠度的关系,以便进行面板的快速设计,见图 5—7。



图 5 平托盘设计总界面
Fig. 5 Flat pallet design main interface

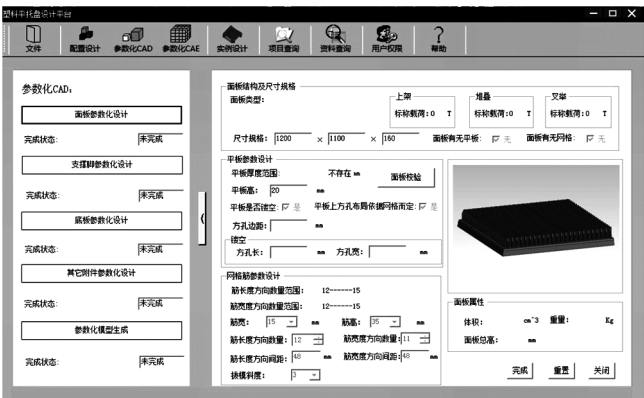


图 6 平托盘设计界面
Fig. 6 Flat pallet design interface

加筋平托盘的近似最大挠度公式为其在结构设

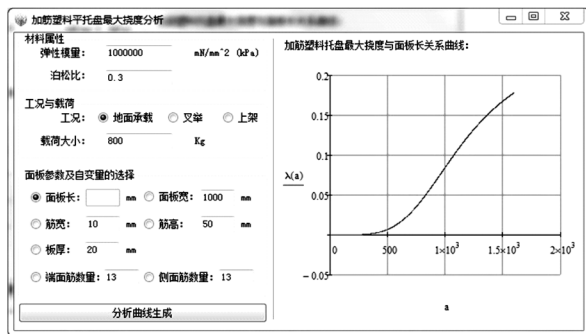


图7 面板结构设计界面

Fig. 7 Panel structure design interface

计中提供方便快捷的分析途径,能够分别分析面板长、宽、加强筋布局、加强筋尺寸及数量对加筋平托盘受载荷时产生的最大挠度的影响,从而为设计提供重要参考。

4 结论

运用变厚度板小变形理论对加筋平托盘在地面承载、叉车和上架等3种工况下的弯曲变形问题进行了研究。引入变厚度抗弯刚度和复杂载荷,进而推出最大挠度公式,并对其离散化处理,使其从复杂的积分运算化为简便的和运算。该最大挠度近似公式,反映了加筋平托盘的尺寸参数和拓扑结构参数与最大挠度之间的联系,可以为托盘的初步设计提供指导。

研究表明,用离散近似算法来计算加筋平托盘受载荷时的最大挠度是可行的,将计算公式中涉及到的积分运算离散化转化为和运算,可以提高计算效率、适于编程且满足精度要求。

参考文献:

[1] 江玮,郁鼎文,冯平法. 加筋板结构静态性能分析及优化设计[J]. 机械设计与制造,2008(2):5-6.

JIANG Wei, YU Ding-wen, FENG Ping-fa. Static Stiffness Analysis and Structure Optimization of Stiffened Plate[J]. Machinery Design & Manufacture, 2008(2):5-6.

[2] 蒋成建,姜献峰,李俊源. 加筋平托盘均布载荷下的变形的研究[J]. 机械设计与制造,2012(5):131-133.

JIANG Cheng-jian, JIANG Xian-feng, LI Jun-yuan. Research on Deformation of Stiffened Flat Pallet under Uniform Load [J]. Machinery Design & Manufacture, 2012(5):131-133.

[3] 郝洪艳,王霖. 层叠式纸浆模塑平托盘结构与性能分析[J]. 包装工程,2010,31(21):15-18.

HAO Hong-yan, WANG Lin. Design and Performance Analysis of Stack Molded Pulp Tray[J]. Packaging Engineering, 2010,31(21):15-18.

[4] 尹恩强,李士才,张新昌. 新型纸浆模塑通用平托盘的结构与性能研究[J]. 包装工程,2009,30(8):10-15.

YIN En-qiang, LI Shi-cai, ZHANG Xin-chang. Research on Structure and Capability of New Molded Pulp Tray [J]. Packaging Engineering, 2009,30(8):10-15.

[5] 国家质量监督检验检疫总局. GB/T 2934—200, 联运通用平托盘主要尺寸及公差[S]. 北京:中国标准出版社, 2007.

Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine. GB/T 2934—200, General-purpose Flat Pallets for Through Transit of Goods Principal Dimensions and Tolerances[S]. Beijing: China Standards Press, 2007.

[6] 国家技术监督局. GB/T 15234—94 塑料平托盘[S]. 北京:中国标准出版社, 1995.

State Bureau of Technical Supervision. GB/T 15234—94, Plastics flat pallets [S]. Beijing: China Standards Press, 1995.

[7] 范家让. 变厚度矩形板[J]. 上海力学,1982(1):17-18.

FAN Jia-rang. Rectangular Plates with Variable Thickness [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 1982(1):17-18.

[8] 黄克智. 板壳理论[M]. 北京:清华大学出版社,1987:87-88.

HUANG Ke-zhi. Theory of Pallet and Shells [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1987:87-88.