

跌落工况下斜支承系统响应分析的变分迭代法

严敏¹, 陈安军²

(1. 江南大学, 无锡 214122; 2. 国家轻工业包装制品质量监督检测中心, 无锡 214122)

摘要: 以斜支承缓冲包装系统为研究对象, 建立了跌落工况下系统的无量纲非线性动力学方程。应用变分迭代方法求解了系统动力学方程, 得到了系统响应的近似解析表达式, 并与龙格库塔数值解进行了比较。研究表明: 跌落工况下斜支承系统响应频率相对误差小于0.3%, 无量纲位移及加速度的响应最大值相对误差小于0.5%, 且无量纲位移、加速度响应随支承角及跌落高度的变化趋势, 与龙格库塔数值结果相同。变分迭代方法求解斜支承系统的跌落冲击问题, 可以得到满意的结果。

关键词: 斜支承系统; 数值解; 变分迭代法; 非线性

中图分类号: TB487; TB485.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2012)13-0071-04

Variational Iteration Method for Response Analysis of Inclined Support Packaging System under Dropping Condition

YAN Min¹, CHEN An-jun²

(1. Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. China National Control and Test Center for Packaging Quality, Wuxi 214122, China)

Abstract: Dimensionless nonlinear dynamical equations of inclined support packaging system under the condition of dropping were established. Variational iteration method was proposed to solve the equation, expressions of approximate solution were obtained, and the results were compared with that of Runge-Kutta numeric method. The results showed that response frequency error of inclined support packaging system under the condition of dropping is less than 0.3%; the error of the max dimensionless displacement and the max dimensionless acceleration is less than 0.5%; and variation trend with dropping height and support angle is the same with Runge-Kutta numeric method. It was concluded that it is valid to apply variational iteration method to solve the problem of inclined support packaging system under the condition of dropping.

Key words: inclined support packaging system; numerical solution; variational iteration Method; nonlinear

20 世纪 60 年代包装工程中采用了斜支承弹簧减振系统, 利用其结构的几何非线性对精密仪器设备进行减振保护, 其减振效果优于垂直安装的线性系统^[1]。文献[2—4]研究了斜支承弹簧非线性减振系统的自振特性及其影响因素, 重点探讨了系统支承角对自振特性的影响; 文献[5]在系统振动方程的基础上, 利用数值分析方法研究了不同支承角、振幅对系统振动特性的影响。现有斜支承系统的研究主要针对自振特性的分析, 探讨自振规律的影响因素; 而跌落工况下, 斜支承系统冲击响应特性的分析未见报

道。

流通过程中, 产品可能遇到跌落冲击环境, 缓冲包装系统的响应分析是包装设计的理论基础。包装系统的跌落冲击响应取决于外部条件, 同时也取决于系统自身的结构特性。斜支承系统由于自身结构的几何非线性, 动力学方程为复杂的非线性形式, 理论分析难以解析表达。求解非线性问题通常采用数值积分和近似解析方法。龙格库塔数值积分方法常应用于非线性包装系统跌落冲击问题求解, 但难以简单的函数描述跌落冲击问题的物理意义。求解非线性

收稿日期: 2012-05-04

作者简介: 严敏(1986—), 女, 湖南人, 江南大学硕士生, 主攻运输包装。

通讯作者: 陈安军(1962—), 男, 河南潢川人, 江南大学教授, 主要从事运输包装动力学、机器人动力学及控制的研究。

方程的变分迭代法^[6-9],基本的思路是对给定的初始条件,利用初始的近似解,通过广义拉氏乘子构造校正泛函,广义拉氏乘子可用变分最佳识别,通过变分迭代可方便地得到非线性方程的近似解析解,且不受小参数的限制,一般一次迭代解即可满足工程精度要求。

笔者利用求解非线性方程的变分迭代法,研究斜支承包系统的跌落冲击响应,建立一种求解斜支承包系统跌落冲击问题的有效理论分析方法。

1 跌落冲击动力学方程及其无量纲化

由4根刚度系数及原长相同的弹簧组成的斜支承包系统见图1。跌落工况下,斜支承包系统动力学方程

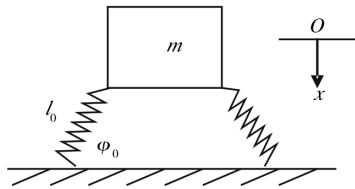


图1 斜支承包系统的模型

Fig. 1 The model of inclined support system

与自振动力学方程具有相同的形式,但初始条件不同。由文献[10],近似动力学方程为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 4k \left(a_0 x + \frac{b_0}{l_0} x^2 + \frac{c_0}{l_0^2} x^3 \right) = 0 \quad (1)$$

初始条件: $t=0$ 时, $x(0)=0$, $\frac{dx(0)}{dt} = \sqrt{2gh}$ 。

式中: $a_0 = \sin^2 \varphi_0$; $b_0 = -\frac{3}{2} \sin \varphi_0 \cos^2 \varphi_0$; $c_0 =$

$\frac{1}{2} \times (1 - 6 \sin^2 \varphi_0 + 5 \sin^4 \varphi_0)$; m 为产品的质量; k 为斜支承弹簧刚度; l_0 为弹簧原长; φ_0 为初始支承角。

记: $\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}}$ 为系统频率参数; $T = \frac{1}{\omega}$ 为系统周期参数; $y = x/l_0$ 为无量纲位移; $\tau = t/T$ 为无量纲时间。由式(1)经推导,得到跌落工况下斜支承包系统无量纲动力学方程为:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + a_0 y + b_0 y^2 + c_0 y^3 = 0 \quad (2)$$

初始条件变为: $\tau = 0$ 时, $y(0) = 0$, $\frac{dy(0)}{d\tau} =$

$\frac{\sqrt{2gh}}{l_0 \omega}$ 。

2 变分迭代解

根据变分迭代的基本原理,对于跌落工况下斜支承包系统无量纲动力学方程式(2),满足跌落冲击初始条件,假设变分迭代的初始近似:

$$y_0 = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta \tau) \quad (3)$$

式中: β 为待定变量, $v_0 = \frac{dy(0)}{d\tau}$ 。由文献[6,7]

变分迭代公式为:

$$y_{n+1} = y_n + \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{a_0}} \sin \sqrt{a_0}(s - \tau) [\ddot{y}_n(s) + a_0 y_n(s) + b_0 y_n^2(s) + c_0 y_n^3(s)] ds \quad (4)$$

一次迭代:

$$y_1 = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta \tau) + \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{a_0}} \sin \sqrt{a_0}(s - \tau) \left[\left(a_0 \frac{v_0}{\beta} - v_0 \beta + \frac{3c_0 v_0^3}{4\beta^3} \right) \sin(\beta s) - \frac{b_0 v_0^2}{2\beta^2} \cos(2\beta s) - \frac{c_0 v_0^3}{4\beta^3} \sin(3\beta s) + \frac{b_0 v_0^2}{2\beta^2} \right] ds \quad (5)$$

为确定待定量 β , 式(5)中令:

$$a_0 \frac{v_0}{\beta} - v_0 \beta + \frac{3c_0 v_0^3}{4\beta^3} = 0 \quad (6)$$

则由式(5)可以得到一阶近似无量纲位移响应:

$$y_1 = \frac{v_0}{\beta} \sin(\beta \tau) - \frac{b_0 v_0^2}{2\beta^2(a_0 - 4\beta^2)} [-\cos(2\beta \tau) + \cos(\sqrt{a_0} \tau)] - \frac{c_0 v_0^3}{4\beta^3(a_0 - 9\beta^2)} [-\sin(3\beta \tau) + \frac{3\beta}{\sqrt{a_0}} \sin(\sqrt{a_0} \tau)] + \frac{b_0 v_0^2}{2\beta^2 a_0} (\cos \sqrt{a_0} \tau - 1) \quad (7)$$

进一步得无量纲加速度响应:

$$\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} = -v_0 \beta \sin(\beta \tau) - \frac{2b_0 v_0^2}{a_0 - 4\beta^2} \cos(2\beta \tau) + \frac{2b_0 v_0^2}{a_0 - 4\beta^2} \cos(\sqrt{a_0} \tau) - \frac{9c_0 v_0^3}{4\beta(a_0 - 9\beta^2)} \sin(3\beta \tau) + \frac{3\sqrt{a_0} c_0 v_0^3}{4\beta^2(a_0 - 9\beta^2)} \sin(\sqrt{a_0} \tau) \quad (8)$$

由式(6)解得:

$$\beta = \frac{\sqrt{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 3c_0 v_0^2}}}{2} \quad (9)$$

系统响应周期:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} \quad (10)$$

系统响应频率:

$$f=\frac{1}{T} \tag{11}$$

且可确定跌落冲击时间:

$$t=\frac{\pi}{\beta} \tag{12}$$

3 响应分析

为探讨变分迭代方法对斜支承包装系统跌落冲

击问题求解的有效性,将一次迭代结果与四阶龙格库塔数值积分方法比较。算例分析取斜支承包装系统中的相关参数,产品质量 $m=30\text{ kg}$,弹簧刚度系数 $k=200\text{ kN/m}$,支承弹簧原长 $l_0=0.075\text{ m}$ 。

3.1 频率分析

在给定支承角及跌落高度条件下,式(2)数值分析计算得到的频率与式(11)变分迭代得到的响应频率比较见表 1。

表 1 斜支承包装系统的响应频率

Tab.1 Response frequency of inclined support packaging system

跌落高度		支承角/(°)						
/m		60	65	70	75	80	85	90
0.1	数值解	0.137 7	0.144 1	0.149 4	0.153 7	0.156 7	0.158 6	0.159 1
	迭代解	0.137 7	0.144 1	0.149 5	0.153 7	0.156 7	0.158 5	0.159 2
0.3	数值解	0.137 1	0.143 8	0.149 3	0.153 6	0.156 7	0.158 6	0.159 1
	迭代解	0.137 3	0.143 9	0.149 3	0.153 6	0.156 7	0.158 5	0.159 2
0.5	数值解	0.136 7	0.143 4	0.149 1	0.153 5	0.156 7	0.158 6	0.159 1
	迭代解	0.137 0	0.143 7	0.149 2	0.153 5	0.156 6	0.158 5	0.159 2
0.7	数值解	0.136 3	0.143 3	0.149	0.153 4	0.156 7	0.158 6	0.159 1
	迭代解	0.136 7	0.143 4	0.149	0.153 4	0.156 6	0.158 5	0.159 2

由表 1 知,相同跌落高度时,随着支承角的增加,系统响应频率增大,周期缩短;相同支承角条件下,跌落高度增大,响应频率减小,周期延长。2 种方法得到的频率的最大误差为 0.3%。

3.2 无量纲位移及加速度响应分析

由四阶龙格库塔法求解无量纲跌落冲击动力学方程式(2),与变分迭代法的一次迭代解式(7)和(8)

得到的无量纲位移及加速度响应比较,结果见图 2—4 (图中:— 表示数值解;* 表示本文迭代解)。

由于篇幅的限制,具体比较时支承角 φ_0 取 60° , 70° 和 90° ,跌落高度 h 取 $0.1,0.3,0.5\text{ m}$ 。由图 2—4 知,变分迭代法得到的一次近似解析解与数值分析解吻合。包装工程中关心的重要参数,如位移响应最大值相对误差小于 0.2%,加速度响应最大值相对误差

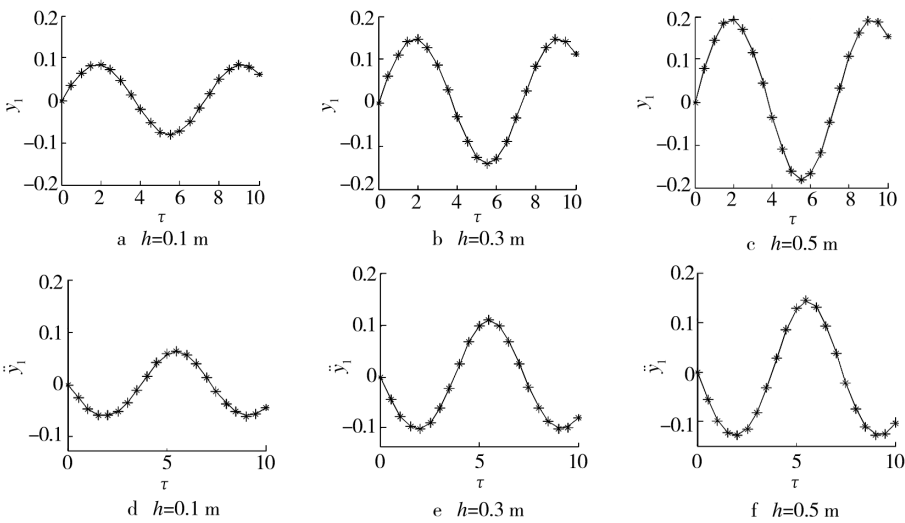
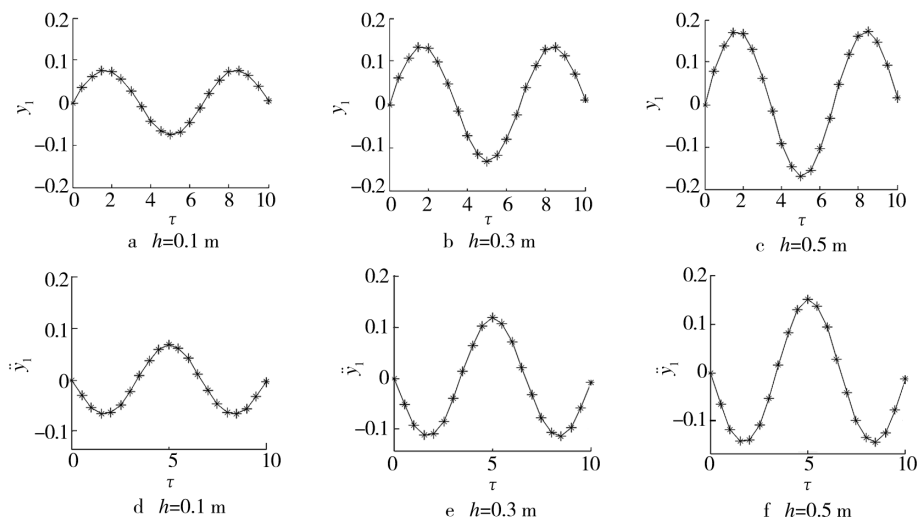
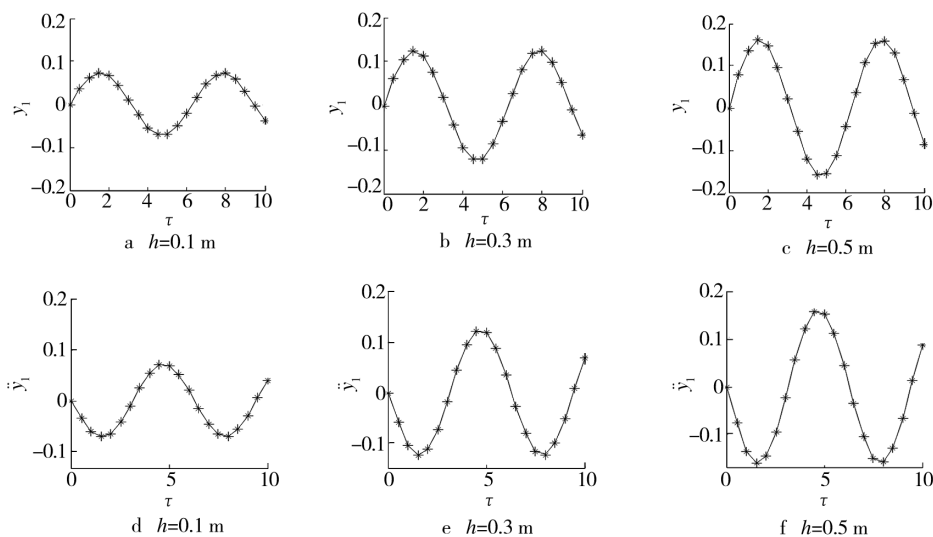


图 2 $\varphi_0=60^\circ$ 时不同跌落高度的无量纲位移响应和加速度响应

Fig.2 Responses of displacement and acceleration of different dropping height when $\varphi_0=60^\circ$

图3 $\varphi_0 = 70^\circ$ 时不同跌落高度的无量纲位移响应和加速度响应Fig. 3 Responses of displacement and acceleration of different dropping height when $\varphi_0 = 70^\circ$ 图4 $\varphi_0 = 90^\circ$ 时不同跌落高度的无量纲位移响应和加速度响应Fig. 4 Responses of displacement and acceleration of different dropping height when $\varphi_0 = 90^\circ$

小于 0.5%。

4 结语

对斜支承弹簧缓冲包装系统跌落冲击工况下的非线性问题,变分迭代方法求解可得到系统频率、无量纲位移及加速度的近似解析表达式,与四阶龙格库塔数值积分比较表明:(1)变分迭代法得到的系统响应频率具有很高的精度,与数值方法比较相对误差在 0.3%以内,且随支承角及跌落高度的变化趋势与数值法相同。(2)系统无量纲位移响应随着跌落高度及

支承角的变化趋势与数值法相同,位移响应的最大值相对误差在 0.2%以内。(3)系统无量纲加速度响应随着跌落高度及支承角的变化趋势与数值法相同,加速度响应的最大值相对误差在 0.5%以内。

参考文献:

- [1] 孙勇,张明辉. 包装动力学中的非线性问题[J]. 包装工程, 1995, 16(1): 5-10
SUN Yong, ZHANG Ming-hui. The Non-linear Problem in the Packaging Dynamics[J]. Packaging Engineering, 1995, 16(1): 5-10.

(下转第 79 页)

Workbench 软件能很快的计算出共振频率及振型,了解结构的固有振动特性,有助于在进行包装设计时避开这些固有频率,有助于找到产品的薄弱部分加以改进,防止产品因共振产生损坏。

3 结论

以电池片为例,根据产品的特性及运输目的地和流通环境设计运输包装方案,利用 CAXA 实体设计和 ANSYS Workbench 有限元分析软件对其建模和分析,验证了设计的合理性与可靠性,同时满足了客户的需求和企业的利益。

参考文献:

- [1] ABERLE Armin. Recent Advances in Solar Cells[Z]. Advances in Opto Electronics, 2007.
 - [2] 宋余水. 太阳能电池包装设计[J]. 科学与财富, 2010(12):172.
SONG Yu-shui. Packaging Design of Solar Cell[J]. Science & Wealth, 2010(12):172.
 - [3] 胡雪芹. 中国光伏产业链发展现状及问题分析[J]. 总裁, 2009.
 - HU Xue-qin. China PV Industry Chain Development Status and Problems[J]. President, 2009.
 - [4] 李宇明, 孙永卫. 包装材料的防静电设计[J]. 包装工程, 2011, 32(19):73.
LI Yu-ming, SUN Yong-wei. Anti-electrostatic Design of Packaging Materials[J]. Packaging Engineering, 2011, 32(19):73.
 - [5] 李兵, 何正嘉, 陈雪峰. ANSYS Workbench 设计、仿真与优化[M]. 北京:清华大学出版社, 2008.
LI Bing, HE Zheng-jia, CHEN Xue-feng. ANSYS Workbench Design, Simulation and Optimization[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008.
 - [6] 杜志敏. CAXA 实体设计教程[M]. 北京数码大方科技有限公司, 2010.
DU Zhi-min. CAXA Physical Design Course[M]. Beijing Digital Generous Science and Technology Co. Ltd, 2010.
 - [7] 浦广益. ANSYS Workbench 12 基础教程与实例详解[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2010.
PU Guang-yi. ANSYS Workbench 12 Basic Course and Example Analysis[M]. Beijing: China Waterpower Water Electricity Press, 2010.
- ~~~~~
- (上接第 74 页)
- [2] 张英世. 斜支承弹簧系统的振动[J]. 机械强度, 1992, 14(2):54—59.
ZHANG Ying-shi. Vibration of Tilted Spring Support[J]. Journal of Mechanical Strength, 1992, 14(2):54—59.
 - [3] 吴晓, 杨立军. 斜支承弹簧非线性减振系统的固有振动[J]. 空间结构, 2008, 14(4):50—52.
WU Xiao, YANG Li-jun. Study on the Natural Vibration of Nonlinear Vibration Reduced System with Inclined Spring Support[J]. Spatial Structure, 1992, 14(2):54—59.
 - [4] 吴晓, 罗佑新, 吴扬. 斜支承弹簧减振系统竖向非线性自振研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(8):85—87.
WU Xiao, LUO You-xin, WU Yang. Study on Vertical Nonlinear Natural Vibration of Shock Absorber System with Tilted Support Spring[J]. Journal of Vibration And Shock, 2008, 27(8):85—87.
 - [5] 陈安军. 斜支承弹簧包装系统非线性振动特性分析[J]. 包装工程, 2009, 30(11):20—22.
CHEN An-jun. Analysis of Nonlinear Vibration Characteristics of Packaging System with Tilted Support Spring[J]. Packaging Engineering, 2009, 30(11):20—22
 - [6] 何吉欢. 变分迭代算法:一种新的非线性分析方法[J]. 上海力学, 1998, 19(3):260—264.
HE Ji-huan. Variational Iteration Method: a New Approach to Nonlinear Analytical Technique[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1998, 19(3):260—264.
 - [7] 王德强, 何吉欢. 一类弱非线性振动方程的变分迭代算法[J]. 振动与冲击, 1998, 17(4):35—38.
WANG De-qiang, HE Ji-huan. Iteration Approach for a Kind of Weak Nonlinear Oscillation Equations[J]. Journal of Vibration And Shock, 1998, 17(4):35—38.
 - [8] 何吉欢. Duffing 方程的变分迭代解法[J]. 计算物理, 1999, 16(2):121—127.
HE Ji-huan. A Variational Iteration Method to Duffing Equation[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 1999, 16(2):121—127.
 - [9] HE Ji-huan. Variational Iteration Method—Some Recent Results and New Interpretations[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2007, 207(1):3—17.
 - [10] 孔凡玲, 陈安军. 半正弦脉冲激励下斜支承包装系统冲击特性的研究[J]. 包装工程, 2011, 32(19):47—49.
KONG Fan-ling, CHEN An-jun. Shock Characteristic Analysis of Packaging System with Tilted Support under the Action of Half-sinusoid Pulse[J]. Packaging Engineering, 2011, 32(19):47—49.