

瓦楞纸板基于抗弯刚度的一种简化模型

段艳健, 钱 怡
(江南大学, 无锡 214122)

摘要: 基于等效抗弯刚度原理,对瓦楞纸板进行了简化,得到了瓦楞纸板的简化模型——等效板,并利用 Ansys Workbench 有限元软件对等效板有限元模型进行了屈曲分析,最后通过试验进行了验证。结果表明,通过抗弯刚度得到瓦楞纸板简化模型的方法简单可行。

关键词: 屈曲分析; 抗弯刚度; 厚度; Ansys Workbench
中图分类号: TB484. 1; TB487 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2012)07-0062-04

A Simplified Model of Corrugated Cardboard Based on Flexural Rigidity DUAN Yan-jian, QIAN Yi

(Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: A simplified model of corrugated cardboard-equivalent plate was established by simplifying corrugated cardboard based on the principle of equivalent flexural rigidity. Bending analysis of equivalent cardboard was carried out using the Ansys Workbench software and the result was verified by experiment. The results showed that the method to establish simplified model of corrugated cardboard through flexural rigidity is simple and feasible.

Key words: bending analysis; flexural rigidity; thickness; Ansys Workbench

瓦楞纸板又称波纹纸板,它是由箱板纸和瓦楞芯纸粘合而成的板状物,是制造各类瓦楞纸箱的基材^[1]。目前国内外有不少学者尝试着应用有限元分析软件对瓦楞纸箱结构进行强度分析,然而在瓦楞纸箱有限元建模及划分网格的过程中发现,纸箱的有限元模型中包含太多的单元和节点,给计算带来很多困难。由此有必要对瓦楞纸板模型进行结构简化,得到与瓦楞纸板性能相近的等效板^[2],从而降低工作难度。

1 瓦楞纸板的简化计算

瓦楞纸箱在受压的过程中,侧板主要发生横向和纵向的弯曲变形,因此,简化瓦楞纸板需要保证瓦楞纸板和等效板在横向和纵向的抗弯刚度分别相等。

1.1 弹性参数的确定

选用的瓦楞纸板结构模型见图 1,楞型为 C 瓦

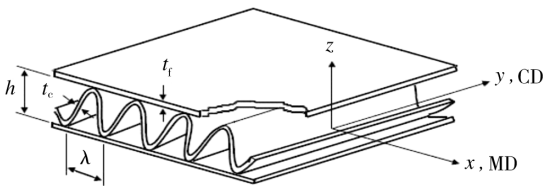


图 1 瓦楞纸板结构示意图
Fig. 1 Sketch map of corrugated cardboard structure

楞,瓦楞芯纸的定量为 115 g/m²,面纸的定量为 200 g/m²。瓦楞芯纸和面纸的厚度分别为 $t_c=0.23\text{ mm}$, $t_f=0.15\text{ mm}$,楞高 $h=4.2\text{ mm}$,楞宽 $\lambda=8\text{ mm}$ 。

根据 GBT 6546—1998^[3]进行试验,得到瓦楞纸板(等效板)的载荷-位移($F-l$)曲线。由于弹性模量^[4]是指在线弹性范围内应力和应变的比值,因此需要在曲线上选取一段较直的线段见图 2。

利用弹性模量公式 $E=\frac{\sigma}{\epsilon}=\frac{\Delta Fl}{S\Delta l}$ (Δl 为纸板长度

收稿日期: 2011-10-26; 修订日期: 2012-02-05
作者简介: 段艳健(1985—),男,河北沧州人,江南大学硕士生,主攻运输包装。
通讯作者: 钱怡(1962—),女,江苏无锡人,江南大学副教授、硕士生导师,主要从事包装结构及机械的动、静性能等研究。

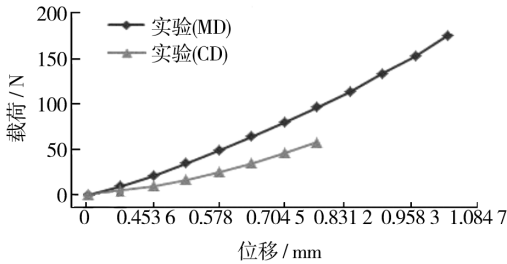


图2 瓦楞纸板的载荷-位移曲线

Fig.2 The load-displacement curve of corrugated cardboard

的变化, ΔF 为与 Δl 对应的载荷的变化, l 为纸板的初始长度, S 为纸板的横截面积) 得到瓦楞纸板(等效板)的弹性模量 E_x, E_y , 由经验公式^[5-6]得到 $E_z, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}, \mu_{xy}, \mu_{yz}, \mu_{xz}$, 其结果见表 1。根据 GBT 12914-2008^[7]中规定的试验方法和经验公式得到面纸和芯纸的弹性参数见表 1。 E, G 的单位是 MPa, μ 是无量纲量。

表 1 瓦楞纸板和原纸的弹性参数

Tab.1 Elastic parameters of corrugated board and base paper

参数	E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{yz}	G_{xz}	μ_{xy}	μ_{yz}	μ_{xz}
纸板	276.6	440.8	1.38	135.1	12.6	5.2	0.37	0.01	0.01
面纸	713	1055	3.6	335.6	30.1	13.0	0.35	0.01	0.01
芯纸	1020	1614	5.1	496.5	46.1	18.5	0.37	0.01	0.01

1.2 瓦楞纸板的抗弯刚度

瓦楞纸箱在受压的过程中,侧板会发生 MD,CD 方向的弯曲变形,假设上下面板相同,且不考虑粘接的误差,则瓦楞纸板的抗弯刚度可以表示为各层抗弯刚度之和^[8],即:

$$D_{11} = D_{11}^m + D_{11}^n \tag{1}$$

$$D_{22} = D_{22}^m + D_{22}^n \tag{2}$$

式中: D_{11}, D_{22} 分别为瓦楞纸板在 MD,CD 方向的抗弯刚度; D_{11}^m, D_{11}^n 分别为瓦楞芯纸和面纸在 MD 方向的抗弯刚度; D_{22}^m, D_{22}^n 分别为瓦楞芯纸和面纸在 CD 方向的抗弯刚度。

1.2.1 瓦楞芯纸的抗弯刚度

瓦楞芯纸的内部结构可视为正弦曲线,其截面见图 3。芯纸的厚度一般都非常小,故单位长度的芯纸对 y 轴的惯性矩 I_y^m 非常小,且随着 x 轴位置的变化而波动,参照文献[9]中的方法设 $I_y^m \approx 0$,根据抗弯刚度公式:

$$D = \frac{EI}{1 - \mu_{xy}\mu_{yx}} \tag{3}$$

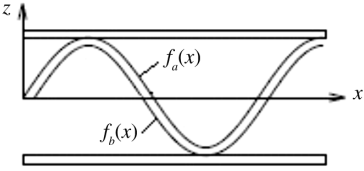


图3 瓦楞纸板横截面示意

Fig.3 Sketch map of corrugated cardboard cross section

可得芯纸沿着 MD 方向的抗弯刚度: $D_{11}^m \approx 0$ 。

根据惯性矩的定义^[10],单位长度的芯纸对 x 轴的惯性矩可以用下式表示:

$$I_x^m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \int_{f_b(x)}^{f_a(x)} z^2 dz \tag{4}$$

式中, $f_a(x), f_b(x)$ 分别代表芯纸横截面顶部和底部的正弦曲线。

$$f_a(x) = \frac{h+t_c}{2} \sin \frac{\pi \left(x + \frac{t_c}{2\pi h} \sqrt{h^2 \pi^2 + \lambda^2} \right)}{\frac{\lambda}{2} + \frac{t_c}{\pi h} \sqrt{h^2 \pi^2 + \lambda^2}} \tag{5}$$

$$f_b(x) = \frac{h-t_c}{2} \sin \frac{\pi \left(x - \frac{t_c}{2\pi h} \sqrt{h^2 \pi^2 + \lambda^2} \right)}{\frac{\lambda}{2} - \frac{t_c}{\pi h} \sqrt{h^2 \pi^2 + \lambda^2}} \tag{6}$$

将 $f_a(x), f_b(x)$ 代入(4)式,得出:

$$I_x^m = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{h^2}{4} t_c + \frac{t_c^3}{12} \right) + \frac{4}{9\pi^2 \lambda} \left(\frac{h^3}{2} t_c + \frac{3h}{2} t_c^3 \right) \sqrt{\pi^2 + \frac{\lambda^2}{h^2}} \tag{7}$$

将 I_x^m 代入(1)式可以得到瓦楞芯纸沿着 CD 方向的抗弯刚度:

$$D_{22}^m = \frac{E_y^m}{1 - \mu_{xy}^m \mu_{yx}^m} \left[\frac{4}{3\pi} \left(\frac{h^2}{4} t_c + \frac{t_c^3}{12} \right) + \frac{4}{9\pi^2 \lambda} \left(\frac{h^3}{2} t_c + \frac{3h}{2} t_c^3 \right) \sqrt{\pi^2 + \frac{\lambda^2}{h^2}} \right] \tag{8}$$

1.2.2 面纸的抗弯刚度

瓦楞纸板的上下面板可以看成厚度非常小的矩形板,因此单位长度的面纸对 x 轴和 y 轴的惯性矩相等,可以表示为:

$$I_x^n = I_y^n = 2 \int_{\frac{h+t_c}{2}}^{\frac{h+t_c}{2}+t_f} z^2 dz \tag{9}$$

所以面纸沿 MD,CD 方向的抗弯刚度可以表示为:

$$D_{11}^n = \frac{E_x^n}{1 - \mu_{xy}^n \mu_{yx}^n} \left[\frac{1}{2} (h+t_c)^2 t_f + (h+t_c) t_f^2 + \frac{2}{3} t_f^3 \right] \tag{10}$$

$$D_{22}^n = \frac{E_y^n}{1 - \mu_{xy}^n \mu_{yx}^n} \left[\frac{1}{2} (h + t_c)^2 t_f + (h + t_c) t_f^2 + \frac{2}{3} t_f^3 \right]$$

11

1.2.3 瓦楞纸板的抗弯刚度

根据公式(1)和(2)得到瓦楞纸板沿 MD,CD 方向的抗弯刚度为:

$$D_{11} = \frac{E_x^n}{1 - \mu_{xy}^n \mu_{yx}^n} \left[\frac{1}{2} (h + t_c)^2 t_f + (h + t_c) t_f^2 + \frac{2}{3} t_f^3 \right]$$

12

$$D_{22} = \frac{E_y^m}{1 - \mu_{xy}^m \mu_{yx}^m} \cdot \left[\frac{4}{3\pi} \left(\frac{h^2}{4} t_c + \frac{t_c^3}{12} \right) + \frac{4}{9\pi^2 \lambda} \left(\frac{h^3}{2} t_c + \frac{3h}{2} t_c^3 \right) \sqrt{\pi^2 + \frac{\lambda^2}{h^2}} \right] + \frac{E_y^n}{1 - \mu_{xy}^n \mu_{yx}^n} \left[\frac{1}{2} (h + t_c)^2 t_f + (h + t_c) t_f^2 + \frac{2}{3} t_f^3 \right]$$

13

1.3 等效板的抗弯刚度

等效板是长、宽与瓦楞纸板相等,均质的实心薄板,见图 4。

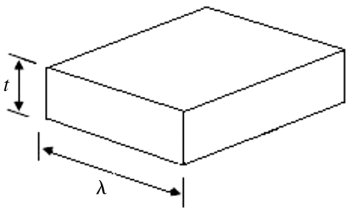


图 4 等效板的结构示意图
Fig. 4 Sketch map of equivalent plate

等效板的厚度为 t , 根据惯性矩^[10] 公式 $I_y = \int_S y^2 dS, dS = \lambda dy$, 则单位长度等效板的横截面对 x, y 轴的惯性矩为:

$$I_x = I_y = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} y^2 dy$$

14

设等效板 MD,CD 方向弹性模量分别为 E'_x, E'_y , 则等效板在 MD,CD 方向的抗弯刚度分别为:

$$D'_{11} = \frac{E'_x t^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$$

15

$$D'_{22} = \frac{E'_y t^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$$

16

1.4 瓦楞纸板的简化结果

瓦楞纸板和等效板在 MD 方向抗弯刚度相等时, 令 $D_{11} = D'_{11}$

$$\frac{E_x^n}{1 - \mu_{xy}^n \mu_{yx}^n} \left[\frac{1}{2} (h + t_c)^2 t_f + (h + t_c) t_f^2 + \frac{2}{3} t_f^3 \right] =$$

$$\frac{E'_x t_1^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$$

瓦楞纸板和等效板在 CD 方向抗弯刚度相等时, 令 $D_{22} = D'_{22}$

$$\frac{E_y^m}{1 - \mu_{xy}^m \mu_{yx}^m} \left[\frac{4}{3\pi} \left(\frac{h^2}{4} t_c + \frac{t_c^3}{12} \right) + \frac{4}{9\pi^2 \lambda} \left(\frac{h^3}{2} t_c + \frac{3h}{2} t_c^3 \right) \cdot \sqrt{\pi^2 + \frac{\lambda^2}{h^2}} \right] + \frac{E_y^n}{1 - \mu_{xy}^n \mu_{yx}^n} \left[\frac{1}{2} (h + t_c)^2 t_f + (h + t_c) t_f^2 + \frac{2}{3} t_f^3 \right] = \frac{E'_y t^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}$$

为了减小误差,取 t_1 和 t_2 的平均值,则等效板的厚度 $t = 3.8 \text{ mm}$,因此本文选用瓦楞纸板的简化模型为长和宽分别与瓦楞纸板相等,厚度为 3.8 mm 的均质薄板。

2 简化模型的仿真与试验验证

2.1 瓦楞纸板边压试验

边压试验参照 GBT 6546—1998“瓦楞纸板边压强度的测定法”,选取瓦楞方向为短边的矩形试样,其尺寸为 $(25 \pm 0.5) \text{ mm} \times (100 \pm 0.5) \text{ mm}$ 。试验样品数量为 5 个。材料试验机上板下移的速度设为 12 mm/min ,试验结果见表 2。

表 2 瓦楞纸板的边压强度试验结果
Tab.2 Results of edgewise press strength
of corrugated cardboard

样品编号	1	2	3	4	5	均值
边压强度/N	378.6	356.4	370.2	381	359.6	369.2

2.2 等效板有限元仿真分析

2.2.1 等效板有限元建模

利用 Ansys Workbench 软件^[11] 中的 Design Modeler 模块建立等效板的几何模型,尺寸为 $(25 \pm 0.5) \text{ mm} \times (100 \pm 0.5) \text{ mm}$,厚度取 $t = 3.8 \text{ mm}$,等效板的弹性参数即为瓦楞纸板的弹性参数,其数值参照表 1。

采用 MultiZone(多域扫描型)方法划分网格,多域法主要来划分六面体网格。其特点就是具有几何体自动分解功能,从而产生六面体网格。设置单元格大小为 5 mm 。确定边界条件,等效板的底端简支(y, z 方向固定, x 方向自由),在等效板的顶端加载一块钢板来模拟材料试验机的上面板,设置较大的弹性模量和剪切模量,保证钢板在受力的过程中不变形,

钢板的密度很小,质量可以忽略不计。钢板的顶端受到方向向下的均布载荷,其有限元模型见图 5。

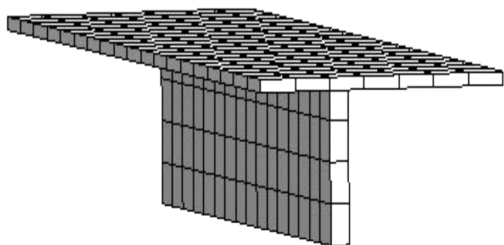


图 5 等效板的有限元模型

Fig. 5 Finite element model of equivalent plate

2.2.2 仿真分析结果

在钢板顶端施加 $F = 100\text{ N}$ 的均布载荷,利用 Ansys Workbench 软件对等效板进行屈曲分析,等效板的变形云图见图 6。

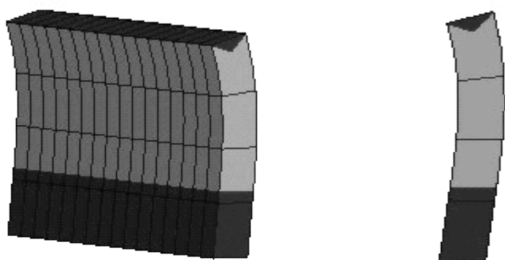


图 6 等效板变形云图

Fig. 6 Deformation nephogram of equivalent plate

屈曲分析得到的载荷因子 $\lambda = 3.72$,因此有限元仿真分析结果得到的等效板的极限载荷为:

$$P_{cr} = F\lambda = 372\text{ N}$$

2.3 结果对比与分析

由数据可以看出等效板的仿真结果比较接近试验结果,误差约为 0.76%。瓦楞纸板属于正交各向异性板,在利用纸板的边压试验和面纸、芯纸的拉伸试验得到弹性参数的过程中,由于试验设备和纸板本身的特性等因素,瓦楞纸板的简化模型出现误差是不可避免的。

3 结论

通过等效抗弯刚度原理得出等效板的厚度,应用 Ansys Workbench 软件对等效板进行屈曲分析,最后通过瓦楞纸板的边压试验进行验证。对比仿真结果

和试验结果,表明基于等效抗弯刚度得出等效板厚度的方法是可行的。瓦楞纸板的简化可以在很大程度上缩短运算时间,提高工作效率。

参考文献:

- [1] 刘喜生. 包装材料学[M]. 长春: 吉林大学出版社, 2005.
LIU Xi-sheng. Packing Material Science [M]. Chang-chun: Jilin University Press, 2005.
- [2] 贺妙欣. 瓦楞纸板屈曲临界载荷的一种等效计算方法[J]. 包装工程, 2010, 31(1): 38-41.
HE Miao-xin. An Equivalent Calculation Method of Critical Load of Corrugated Board[J]. Packaging Engineering, 2010, 31(1): 38-41.
- [3] GBT 6546-1998, 瓦楞纸板边压强度的测定法[S].
GBT 6546-1998, Compression Strength Determination Method of Corrugated Board [S].
- [4] 李培根. 机械工程基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
LI Pei-gen. BAcon. Mechanical Engineering Foundation [M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2008.
- [5] ALLANSSON A. Stability And Collapse of Corrugated Board[D]. Structural Mechanics, 2001.
- [6] BIANCOLINI M E, BRUTTI C. Numerical Evaluation of Buckling and Post-Buckling Behaviour of Corrugated Board Containers[J]. Aias, 2005.
- [7] Gb/T 12914-2008, 纸和纸板抗张强度的测定[S].
Gb/T 12914-2008, Tensile Strength Determination of Paper and Board[S].
- [8] 陈菲菲. 瓦楞夹层结构等效弹性常数研究[D]. 武汉: 武汉理工大学, 2009.
CHEN Fei-fei. Equivalent Elastic Constants of Corrugated Sandwich Structure[D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2009.
- [9] LUO S, SUHLING J C. The Bending Stiffness of Corrugated Board[J]. Mechanics of Cellulosic Materials, 1992.
- [10] 孙训方. 材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1997.
SUN Xun-fang. Material Mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1997.
- [11] 浦广益. Ansys Workbench 基础教程与实例详解[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2010.
PU Guang-yi. Ansys Workbench Tutorial and Example Explanation[M]. Beijing: China Water Conservancy and Hydropower Press, 2010.