

基于几何法的 3-PCR 平移并联分拣机器人工作空间研究

商记中, 陈安军

(江南大学, 无锡 214122)

摘要: 利用几何法, 对 3-PCR 并联机器人运动学方程进行了分析。选取了一定的参数, 在三维软件 INVENTOR 里绘制出了相应的工作空间, 通过分析单独支链的工作空间, 最后确定了工作空间的包络面及包络线, 并分析了该机构工作空间内的奇异性。

关键词: 几何法; 3-PCR 平移并联分拣机器人; 工作空间

中图分类号: TB486⁺.3; TP24 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3563(2011)17-0080-04

Research on the Workspace of 3-PCR Translational Sorting Parallel Robot Based on Geometrical Method

SHANG Ji-zhong, CHEN An-jun

(Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: The kinematical equation of a 3-PCR parallel robot was analyzed in geometrical method. With certain parameters specified, the corresponding workspace was drawn out with a 3D software INVENTOR. By analyzing workspace of each limb, the faces and lines of the workspace boundary was determined and then the singularity of the workspace was discussed.

Key words: geometrical method; 3-PCR parallel manipulator; workspace

在当前包装行业中, 包装件的自动分拣主要依靠串联机器人, 但串联机器人各驱动装置装载在关节上, 故其运动惯量大, 难以实现高速或超高速运动, 且传动力矩小; 并联机器人驱动装置装载在定平台上, 因此其转动惯量小, 具有传动力矩大、易实现高速运动等特点, 应用于包装行业, 具有很大的优势。目前国内并联分拣机器人的研究已经取得了一定的成就, 如 3-PPRR 并联机器人^[1]、高速并联电池质量分拣机械手^[2]以及搬运分拣机器人^[3]。但并联机器人工作空间相对串联机器人较小, 在一定程度上, 限制了并联机器人广泛应用, 因此, 对并联机器人工作空间尤其是工作空间优化的研究就变得很迫切。工作空间的分析一般分为数值法和解析法, 因为解析解会随着支链数目的增多, 方程的复杂程度和求解难度也随之增大, 所以目前并联机器人工作空间分析主要用数值法, 例如网格法、Jacobi 法、Montecarlo 法和优化法^[4], 而对于工作空间的优化, 在一定范围内解析解更具有应用价值。对解析解的求取, 很大程度上依赖

于对正解的研究, 以 Gosselin^[5]提出的几何法可以从运动学方程建立模型, 从而使得工作空间直观且易于求得。刘辛军、张立杰等人^[6]通过 AutoCAD 绘制出并联机器人在某一平面内的工作面, 并求取了解析解; 曹毅^[7]以蒙特卡洛法得到并联机器人的几何工作空间, 然后识别抽取边界的关键点, 从而得到了并联机器人的工作空间解析解。以求解 3-PCR 并联机器人为研究对象, 应用几何法求取工作空间解析解, 并对工作空间内的奇异性进行分析。

1 3-PCR 并联机器人的运动学方程

李波^[8]等人建立了 3-PCR 并联机器人模型, 确定了由移动副、圆柱副和转动副连接动平台与定平台, 并在定平台与动平台上建立了相应的坐标见图 1, 坐标 $O-xyz$ 固定在定平台中心点 O 处, z 轴垂直于 xOy 平面(图 1), y 轴垂直并指向边 O_2O_3 , 坐标 $P-x_4y_4z_4$ 固定动在平台中心点 P 处, z_4 轴平行 z 轴, 坐

收稿日期: 2011-06-11

作者简介: 商记中(1986—), 男, 河北唐山人, 江南大学硕士生, 主攻机器人动态性能分析与优化。

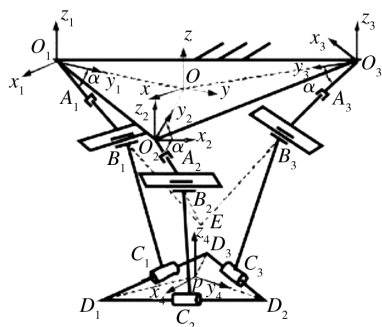


图 1 3-PCR 并联机器人的机构

Fig. 1 Schematic diagram of a 3-PCR parallel robot

标 $O_i-x_iy_iz_i (i=1,2,3)$ 分别固定在 O_i 点, z_i 平行于 z 轴, y_i 指向 O 点。其运动方程:

$$\begin{cases} \left(y_p - l_1 \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 + (l_1 \sin \alpha + z_p)^2 = h_1^2 \\ \left(\frac{\sqrt{3}x_p + y_p}{2} + l_2 \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 + (l_2 \sin \alpha + z_p)^2 = h_2^2 \\ \left(\frac{\sqrt{3}x_p - y_p}{2} - l_3 \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 + (l_3 \sin \alpha + z_p)^2 = h_3^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中: x_p, y_p, z_p 为末端执行器在坐标 $O-xyz$ 内的坐标值; l_1, l_2, l_3 为移动杆长度; α 为驱动杆与顶平台夹角; h_1, h_2, h_3 为与动平台连接杆件的长度; a 为顶平台内切正三角形边长; b 为动平台内切正三角形边长。

2 绘制单链工作空间

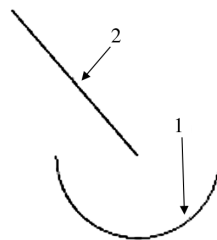
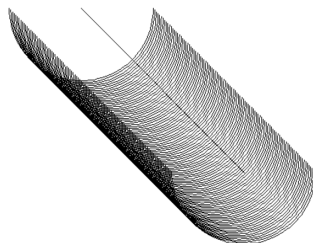
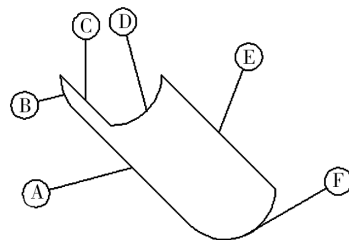
由式(1)中第 1 式即支链 $O_1A_1B_1$ 运动学方程知, 当 l_1 为定值时, 其工作空间为一柱面, 准线为:

$$\left(y_p - l_1 \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 + (l_1 \sin \alpha + z_p)^2 = h_1^2 \quad (2)$$

母线为平行 x 轴的直线段, 利用 INVENTOR 软件可绘制在 yOz 平面内该支链的工作平面。因机构受重力的影响, 动平台不可能高过转动副, 因此, 在 yOz 平面内, 固定驱动参数 l_1 得到的工作弧线 1 见图 2。

若 l_1 在 $\left(0, \frac{\sqrt{3}a}{3\cos \alpha}\right)$ 内取值, 即可以沿图 2 中线段 2 方向阵列弧线 1, 得到的图形见图 3, 然后抽取其边界, 绘制平面图形, 见图 4。

A, B, C, D, E, F 分别为抽取的边界线, 边界在三

图 2 支链 $O_1A_1B_1$ 在 yOz 平面的工作弧线Fig. 2 The work arc of limb $O_1A_1B_1$ in yOz plane图 3 支链 $O_1A_1B_1$ 在 yOz 平面的工作线段Fig. 3 The work arc of limb $O_1A_1B_1$ in yOz plane图 4 在 yOz 平面中抽取的边界Fig. 4 Boundary extracted in plane yOz

维图形中进行拉伸, 拉伸高度即为圆柱副长度, 该单支链工作空间由 1 个柱面和 2 个平面所包围, 见图 5。

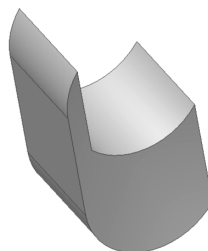


图 5 单支链的工作空间

Fig. 5 The workspace of single limb

经分析可得支链 $O_1A_1B_1$ 在坐标 $O-xyz$ 下的工作空间表面方程式(3), 其中 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 为沿 z 轴方向拉伸线段 A, B, C, D, E, F 所得柱面; M_1, N_1 为拉伸截面; d 为 $1/2$ 圆柱副长度。

$$\begin{cases}
 \left(y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 + z_1^2 = h_1^2 & (B_1, D_1, J_1) \\
 \left(y_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}b\right)^2 + \left(z_1 + \frac{\sqrt{3}a \tan \alpha}{3}\right)^2 = h_1^2 & (F_1) \\
 y_1 = \tan \alpha \left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b - h_1\right) & (C_1) \\
 y_1 = \tan \alpha \left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b + h_1\right) & (E_1) \\
 y_1 + \frac{h}{\cos \alpha} = \tan \alpha \left(x_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b + h_1\right) & (A_1) \\
 x_1 = \pm d & (M_1, N_1)
 \end{cases} \quad (3)$$

然后围绕坐标轴 Z 轴分别旋转 120° 和 240° , 得到另外 2 条支链的工作空间, 使用旋转矩阵, 得到另外 2 个支链的工作空间包络面方程:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ & 0 \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 240^\circ & -\sin 240^\circ & 0 \\ \sin 240^\circ & \cos 240^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

解得:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-x_2 + \sqrt{3}y_2}{2} \\ y_1 = \frac{-x_2 - \sqrt{3}y_2}{2} \\ z_1 = z_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-x_3 + \sqrt{3}y_3}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{3}x_3 - y_3}{2} \\ z_1 = z_3 \end{cases} \quad (7)$$

将式(6)和(7)带入第 1 个支链工作空间包络面方程组式(3), 可以得到另外 2 个支链的工作空间包络面, 然后 3 个支链的工作空间相交, 取其交集, 即为 3-PCR 并联机器人的工作空间。

由于 3-PCR 并联机器人的工作空间随着机构几何参数的变化而呈现出不同的形状, 因而其包络面的表达式也不同, 取一组参数: $a = 1\ 000\ \text{mm}$, $b = 100\ \text{mm}$, $d = 400\ \text{mm}$, $h_1 = h_2 = h_3 = 300\ \text{mm}$, $\alpha = 45^\circ$ 时, 3-PCR 并联机器人的工作空间见图 6。

在图 6 中取 M_1 和 N_2 2 个面, 通过分析可得方程如下:

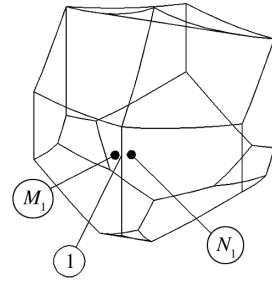


图 6 3-PCR 并联机器人工作空间包络图

Fig. 6 The boundary of a 3-PCR parallel robot

$$x = 400 \quad (M_1) \quad (8)$$

$$x - \sqrt{3}y - 800 = 0 \quad (N_2) \quad (9)$$

则图 6 中所示的包络线^[5]可以表示为:

$$\begin{cases} x = 400 \\ x - \sqrt{3}y - 800 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

通过上述方法, 可以求出整个 3-PCR 并联机器人工作空间包络面及包络线的解析解。

3 3-PCR 并联机器人工作空间内部奇异性分析

由运动学方程(1)对时间求导, 可得其运动学方程^[7]:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \quad (12)$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 中:

$$\begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = y - l_1 \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b \\ a_{13} = l_1 \sin \alpha + z \\ a_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}x + y}{2} + l_2 \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b \right) \\ a_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}x + y}{2} + l_2 \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b \right) \\ a_{23} = l_2 \sin \alpha + z \\ a_{31} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2} - l_3 \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{6}b \right) \\ a_{32} = \frac{1}{2} \left(y - \frac{\sqrt{3}x}{2} + l_3 \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b \right) \\ a_{33} = l_3 \sin \alpha + z \end{cases} \quad (13)$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 中 :

$$\begin{cases} m_{11} = \cos \alpha \left(y - l_1 \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} a - \frac{\sqrt{3}}{6} b \right) - \\ \sin \alpha (l_1 \sin \alpha + z) \\ m_{22} = -\cos \alpha \left(\frac{\sqrt{3}x + y}{2} + l_2 \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} a + \frac{\sqrt{3}}{6} b \right) - \\ \sin \alpha (l_2 \sin \alpha + z) \\ m_{33} = \cos \alpha \left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2} - l_3 \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} a - \frac{\sqrt{3}}{6} b \right) - \\ \sin \alpha (l_3 \sin \alpha + z) \end{cases} \quad (14)$$

当矩阵行列式 $\det(\mathbf{A})=0$, 并且 $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ 时, 为第 1 类奇异, 即逆运动学奇异。当机构处于该种类型奇异时, 机构丧失 1 个或多个自由度, 而由于 3-PCR 并联机器人为 3 自由度平移机器人, 因而只能在 x 轴、 y 轴、 z 轴方向上移动, 而不具有旋转的可能。从图 6 可知, 该机构的工作空间为一实心体, 因此, 只在实心体表面发生第 1 类奇异。

在轨迹规划时, 只要使机构的末端执行器在工作空间内部运动, 而不触及工作空间边界, 就可以避免第 1 类奇异的发生。

当矩阵行列式 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 并且 $\det(\mathbf{B})=0$ 时, 机构发生第 2 类奇异, 即正运动学奇异, 当机构处于该种类型奇异时, 即使锁死驱动器, 末端执行器也会拥有 1 个或者多个自由度。通过观察矩阵 $\mathbf{A}$, 发现当 $\det(\mathbf{B})=0$ 时, 则机构一条支链中连接圆柱副和动平台的杆件与驱动副轴线垂直; 另外, 通过图 1 发现, 当机构定平台在上, 动平台在下安装时, 机构由于受到重力的影响, 支链中连接圆柱副和动平台的杆件末端绕圆柱副轴线旋转, 且为下面半圆。为避免发生第 2 类奇异, 在设计机构时, 可以通过对驱动副与定平台夹角 α 进行限制, 使支链中连接圆柱副和动平台的杆件在可能的运动范围内, 不与驱动副轴线垂直, 即 $\alpha \in (0, 90^\circ)$ 。

当矩阵行列式 $\det(\mathbf{A})=0$ 且 $\det(\mathbf{B})=0$ 时, 机构发生第 3 类奇异, 当机构处于该种奇异时, 机构末端执行器会丧失一定的自由度, 同时锁定驱动器, 末端执行器也拥有自由度。通过约束驱动副范围并且优化驱动副与定平台夹角 α , 可以避免机构处于第 3 类奇异。

因此, 当 α 的取值范围为 $(0, 90^\circ)$ 时, 通过合理的规划驱动参数, 可以避免该机构发生奇异。

4 总结

1) 以 3-PCR 并联分拣机器人为研究对象, 通过几何法求得了其工作空间, 并对其包络面和包络线求取了解析解。

2) 分析了该机构工作空间内部奇异性, 当 α 在 $(0, 90^\circ)$ 内取值时, 机构工作空间内部无奇异性。

通过对 3-PCR 并联分拣机器人工作空间解析解的求取及奇异性的分析, 对以后的机构优化将有很大帮助, 从而指导 3-PCR 并联分拣机器人的样机设计。如实现包装分拣、搬运动作, 可根据上述求得的 3-PCR 并联分拣机器人工作空间包络面和包络线, 选取合适的安装位置 and 最优的杆件参数, 以降低包装成本, 并综合奇异性分析, 合理规划运动轨迹, 避免机构产生奇异, 提高机构稳定性。该机构应用于包装分拣、搬运等操作领域, 将发挥很大的作用, 因此该机构具有良好的应用前途。

参考文献:

- [1] 王耀庭, 马雪梅, 陈安军. 3-PPRR 平移分拣并联机器人的运动学分析[J]. 包装工程, 2010, 31(19): 55-59.
- [2] 赵学满, 王攀峰, 李占贤, 等. 基于高速并联机械手的电池质量分拣机设计[J]. 机械设计, 2005, 22(10): 3-5.
- [3] 付铁, 李金泉, 陈恩, 等. 一种新型高速码垛机械手的设计与实现[J]. 北京理工大学学报, 2007, 27(1): 17-20.
- [4] 范守文, 徐礼钜. 机器人工作空间分析的解析法[J]. 机械设计与研究, 2004, 20(z1): 194-199.
- [5] GOSSELIN C M. Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators[J]. Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 331-336.
- [6] 刘辛军, 张立杰, 高峰. 基于 AutoCAD 平台的六自由度并联机器人位置工作空间的解析求解方法[J]. 机器人, 2000, 22(6): 457-464.
- [7] 曹毅, 王树新, 李群智. 基于随机概率的机器人工作空间及其解析表达[J]. 设计与研究, 2005(2): 1-4.
- [8] 李波, 陈安军. 3-PCR 并联机器人机构的运动学分析[J]. 机械设计与研究, 2009, 25(5): 31-34.