# 有限修理能力下的可修件库存优化研究

林 健[1,2]，马振书[2]，赵方庚[2]
(1. 军械工程学院，石家庄 050000；2. 总装备部军械技术研究所，石家庄 050000)

**摘要：** 针对传统可修件库存模型的假设与实际应用不符的问题，提出了一个基于有限修理能力的可修件库存模型，并且假设备件需求服从非稳态分布，分析了各种系统效能指标，并运用相关方法和排队理论进行了求解，最后结合实例进行了算法分析。结果表明，该模型既满足系统成本最低的要求，又实现了总短缺数最少的目标。

**关键词：** 可修件；排队论；库存优化
**中图分类号：** F505；F715.6 **文献标识码：** A **文章编号：** 1001-3563(2011)05-0108-04

## Research on Optimal Inventory of Repairable Item under Limited Repair Capacity

*LIN Jian*[1,2], *MA Zhen-shu*[2], *ZHAO Fang-geng*[2]
(1. Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050000, China; 2. Ordnance Technology Research Institute, Shijiazhuang 050000, China)

**Abstract:** Classical multi-echelon repairable item inventory models are based either on steady-state distribution or infinite repair capacity, which are at variance with real situation. A repairable item inventory model based on limited repair capacity and non-stationary demands was put forward. The system performance measure was analyzed and the model was solved with queuing theory and other related means. Algorithm analysis was carried out with real examples. The results showed that the model can satisfy the lowest system cost requirement and realize the goal of minimal total shortage.

**Key words:** repairable item; queuing theory; optimal inventory

一些复杂昂贵的大型设备在使用过程中发生故障，往往是由于部件的磨损或者损坏造成的，为了保证设备可用度，必须适当存储备件。在备件库存研究方面，国外的研究起步较早，且已日渐成熟，很多研究成果已经应用到实际工作中，但国内的研究还处于起步阶段，而且相关研究为了降低复杂性，一般都假设维修机构的修理能力无限，对于备件的需求量也都描述成服从稳态分布，但这些假设并不符合实际应用的环境，往往会造成库存的预计水平产生较大误差，出现严重低估备件库存数量的情况。基于此，笔者针对非稳态需求的情况提出了一个有限修理能力下的可修件库存模型，为管理者进行决策和实现备件的最优分配提供理论依据。这里所讲的修理能力是指在维修级别一定的情况下，维修机构所能完成的工作量，其大小是由维修资源的数量决定，与通常所讲的决定维修级别高低的维修能力并不是一个概念。

## 1 模型的构建

### 1.1 条件假设

1）研究的备件只针对本级能够维修的备件，而且只考虑现场可更换件(LRU)。

2）备件库存采用$(s-1,s)$策略，即任何发生故障的零部件都可以一个接一个修理，不存在成批修理。

3）维修资源有限，每种故障件就需要一种维修资源，不同的故障件可能会竞争同一种资源，故障件的维修采取先到先服务的原则，只有等维修资源空闲时才能接受服务，否则必须排队等候。

**收稿日期：** 2010-10-08
**基金项目：** 军内科研计划资助项目
**作者简介：** 林健(1984－)，男，山东即墨人，军械工程学院硕士生，主攻军事物流。

4）备件的需求率是随时间变化的，整个周期内备件需求服从非稳态泊松分布，但周期内各个时间段的需求可以看作是稳态的泊松分布，故障件的维修时间服从负指数分布。

5）系统成本只考虑备件本身成本。

### 1.2　符号说明及表达式

备件的种类用 $k$ 表示，$k=1,\cdots,K$；由于存在上级补充的情况，所以用 0 表示上级单位。其他符号如下：$\mathrm{MTBF}_k$ 为第 $k$ 种 LRU 的平均故障间隔时间；$T_k$ 为上级单位供应第 $k$ 种 LRU 的时间；$N_s$ 为本单位拥有的装备数量；$M_k$ 为每台装备包含的第 $k$ 种 LRU 的数量；$\mathrm{UR}(t)$为在任意时刻 $t$ 的装备利用率；$C_k$ 为第 $k$ 种 LRU 的单位成本；$\lambda_k(t)$为在任意时刻 $t$ 第 $k$ 种 LRU 的需求率；$N_k(t)$为在任意时刻 $t$ 维修机构中第 $k$ 种 LRU 的数量；$\mathrm{EBO}_k(t)$为在任意时刻 $t$ 第 $k$ 种 LRU 的期望短缺数；$\mathrm{BP}_k(t)$为在任意时刻 $t$ 需求的第 $k$ 种 LRU 的平均数量；$\mathrm{SP}_k(t)$为在任意时刻 $t$ 上级可能补充的第 $k$ 种 LRU 的数量；$\mathrm{RP}_k(t)$为在任意时刻 $t$ 送修的第 $k$ 种 LRU 的数量；$s_k$ 为第 $k$ 种 LRU 的库存数量。

### 1.3　系统效能指标分析

首先计算需求率。在这假设装备数量是足够大的，可以得出本单位对第 $k$ 种 LRU 的需求率：

$$\lambda_k(t)=\frac{\mathrm{UR}(t)}{\mathrm{MTBF}_k/M_k}\times N_s \tag{1}$$

由于假设备件的需求服从非稳态的泊松过程，所以用非稳态的期望短缺数 EBO 作为目标函数，定义 $\mathrm{EBO}(s\mid n)$ 表示平均供应渠道件数为 $n$ 库存量为 $s$ 时的期望短缺数，具体计算公式为[1]：

$$\mathrm{EBO}(s)=P(\mathrm{DI}=s+1)+2P(\mathrm{DI}=s+2)+3P(\mathrm{DI}=s+3)+\cdots=\sum_{x=s+1}^{\infty}(x-s)P(\mathrm{DI}=x) \tag{2}$$

其中：$s$ 表示库存量，是一常数；OH 是基地现有库存件数；DI 是来自修理机构和上级补给的供应渠道件数；BO 是备件短缺数，这些都是非负的随机变量；$P(\mathrm{DI}=x)$ 表示供应渠道件数为某一具体值 $x$ 时概率。

接下来计算本级需求的 LRU 数量，也就是供应渠道的数量。备件需求按泊松过程给定，且泊松过程的之和仍是泊松过程[2]，根据期望的线性特性，可以得出 $\mathrm{BP}_k(t)$ 的期望值：

$$E[\mathrm{BP}_k(t)]=E[\mathrm{SP}_k(t)]+\mathrm{EBO}_k(t-T_k) \tag{3}$$

由于 $T_k$ 是常量，根据帕尔姆定理可以得出 $\mathrm{SP}_k(t)$ 是一个随机的泊松变量[3]，且均值为

$$E[\mathrm{SP}_k(t)]=\int_{(t-T_k)^+}^{t}\lambda_k(u)\mathrm{d}u \tag{4}$$

根据期望短缺数的定义式，当库存为 $s_k$ 时，在任意时间 $t$ 由于送修造成的期望短缺数可以表示为：

$$\mathrm{EBO}_k(t)=\mathrm{EBO}(s_k\mid E[\mathrm{RP}_k(t)]) \tag{5}$$

在任意时刻 $t$，送修的第 $k$ 种 LRU 的数量是一个随机泊松变量，且均值等于该时刻维修机构中第 $k$ 种 LRU 的期望值，即 $E[\mathrm{RP}_k(t)]=E[N_k(t)]$，由于维修资源的有限性，此时维修机构中存在排队维修现象，要计算此值需要结合排队模型，其中维修机构中 LRU 的数量由排队等候的和接受维修的两部分组成。

最后根据式(1)－(5)可以得出在任意时刻 $t$，本级库存为 $s_k$ 时第 $k$ 种 LRU 的期望短缺数：

$$\mathrm{EBO}_k(t)=\mathrm{EBO}(S_k\mid E[\mathrm{BP}_k(T)]) \tag{6}$$

同时可以求出任意时刻 $t$ 系统的期望短缺数：$\mathrm{EBO}(t)=\sum_{k=0}^{K}\mathrm{EBO}_k(t)$。

### 1.4　优化模型

这里所涉及的费用只考虑备件本身的成本，库存费用、运输费用和相关管理费用忽略不计，整个设备保障周期费用用 LC 表示，具体公式如下：

$$\mathrm{LC}=\sum_{k=1}^{K}C_k s_k \tag{7}$$

保障周期是 $T$，定义 $\mathrm{maxEBO}=\max_{t\subset T}\mathrm{EBO}(t)$ 作为最终的目标函数。

优化目标和约束条件可以从 2 个角度进行描述：

1）以给定费用为约束，以期望短缺数最小为目标。假设预算经费为 $B$，则数学模型可以表示为：

$$\min\ \mathrm{maxEBO}$$
$$\text{s.t.}\ \ \mathrm{LC}\leqslant B$$

2）以给定期望短缺数为约束，以费用最低为目标。假设给定期望短缺数为 $b$，则数学模型为：

$$\min\ \mathrm{LC}$$
$$\text{s.t.}\ \ \mathrm{maxEBO}\leqslant b$$

## 2　维修机构中的排队模型

要计算备件的期望短缺数，必须先求出维修机构中各种故障件的数量，即 $N_k(t)$。

由于维修资源的有限性，维修机构肯定会产生排队现象，所以在这要运用相关的排队理论。本文研究的排队系统是基于有限维修资源下的情况，与基于无限维修渠道的帕尔姆定理是不同的，而且与传统的M/M/s排队系统相比，该系统研究的是多种类顾客(LRU)的情况，每种顾客都有各自的到达率和服务率，但是到达过程都服从非稳态的泊松过程。

为了与排队论的专门用语一致起来，先进行如下说明：一种维修资源就是一个服务者，一个LRU就是一名顾客[4]。基于先前的假设，每一个LRU都需要一种维修资源，但不同的LRU可能竞争同一种维修资源。对维修资源的等待采取先到先服务的原则，不存在优先级插队现象，一个顾客到达时必须等待上一个顾客服务结束才能接受服务，称这种排队系统为有限服务者多种类顾客的非稳态排队系统，见图1。

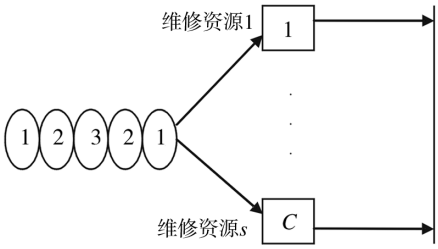


图1 有限服务者多种类顾客的非稳态排队系统

Fig. 1 Multi-class client queuing system with finite servers

目的是计算队列中任意时刻每种顾客的期望值，但是目前还没有一种分析方法能够准确地求出这个指标，接下来将介绍一种有效的近似法。符号说明：$c$为顾客种类(与LRU的种类$k$相对应)；$s$为服务者数量；$\lambda_c(t)$为在任意时刻$t$第$c$类顾客的到达率；$\mu_c$为第$c$类顾客的服务率；$\lambda(t)$为在任意时刻$t$顾客的累积到达率；$\mu(t)$为在任意时刻$t$的平均服务率；$N_c(t)$为在任意时刻$t$系统中第$c$类顾客的期望数；$N(t)$为在任意时刻$t$系统中所有顾客的期望数；$Q_c(t)$为在任意时刻$t$排队等候的第$c$类顾客的期望数；$Q(t)$为在任意时刻$t$排队等候的所有顾客的期望数；$R_c(t)$为在任意时刻$t$接受服务的第$c$类顾客的期望数；$U(t)$为在任意时刻$t$处于忙期的服务者数量，即接受服务的顾客数。

首先通过计算累积到达率和平均服务率，将多种类顾客的排队系统看作是单种类顾客的排队系统[5-6]，求出任意时刻$t$的累积到达率和平均服务率：

$$\lambda(t)=\sum_c \lambda_c(t),\mu(t)=\frac{\lambda(t)}{\sum_c \frac{\lambda_c(t)}{\mu_c}} \tag{8}$$

然后通过运用迭代法和闭包假设法，根据微分方程求出任意时刻$t$系统中所有顾客的期望数，具体为[7-8]：

$$\begin{cases} N'(t)=\lambda(t)-\mu(t)s+\mu(t)\sum_{n=0}^{s-1}(s-n)P_n \\ v'(t)=\lambda(t)+\mu(t)s-\mu(t)\sum_{n=0}^{s-1}[2N(t)+1-2n]\cdot \\ \qquad (s-n)P_n \end{cases} \tag{9}$$

其中：$P_n$表示负二项分布的概率函数；$v(t)$表示系统中顾客数的方差，而且$p=N(t)/v(t)$，$r=N^2(t)/[v(t)-N(t)]$。

求出$N(t)$之后，再计算非稳态情况下的各种顾客的期望短缺数，其中$N(t)=\sum_c N_c(t)$，据此将$N(t)$分解成若干独立个体，每一个体对应一种顾客。

在稳态情况下，各类顾客的期望等待时间是相同的，用$W$表示，则有$N_c=\lambda_c W+\lambda_c/\mu_c$，如果将顾客的期望等待数分为两部分，一部分是排队等待的顾客，用$Q_c$表述；另一部分是正在接受服务的顾客，用$R_c$表示。这样可以得出$Q_c=\lambda_c W$和$R_c=\lambda_c/\mu_c$。

在非稳态情况下，系统输入率只跟顾客到达率有关，而系统输出率既与顾客到达率有关也与顾客服务率有关，可以将系统在任意时刻$t$的所有顾客期望数也分为2部分：在排队等候的，$Q(t)$；正在接受服务的，$U(t)$。同时可以得出：

$$N(t)=Q(t)+u(t),N_c(t)=Q_c(t)+R_c(t) \tag{10}$$

$$Q_c(t)=\frac{\lambda_c(t)}{\lambda(t)}Q(t)=\frac{\lambda_c(t)}{\lambda(t)}[N(t)-U(t)]$$

$$R_c(t)=\frac{\lambda_c(t)/\mu_c}{\lambda(t)/\mu(t)}U(t) \tag{11}$$

## 3 算法实现实例

为了简化问题，在这仅考虑产生最大短缺数的使用阶段，并假定供应渠道件数，每台装备由2项备件构成，需求服从泊松分布，具体数值及对应短缺数见表1。

**表 1　模型数据实例**

**Tab.1 The example of model data**

| | 备件 1 | 备件 2 |
|---|---|---|
| 供应渠道平均件数 | 1 | 4 |
| 备件单价/万元 | 5 | 1 |
| 库存量 $s$ | EBO($s$) | EBO($s$) |
| 0 | 1.000 | 4.000 |
| 1 | 0.368 | 3.018 |
| 2 | 0.104 | 2.110 |
| 3 | 0.023 | 1.348 |
| 4 | 0.004 | 0.782 |
| 5 | 0.001 | 0.410 |
| 6 | 0 | 0.195 |
| 7 | 0 | 0.085 |
| 8 | 0 | 0.034 |
| 9 | 0 | 0.012 |
| 10 | 0 | 0.004 |

假定目标短缺数 0.2。首先使用传统的反复试验法,求出备件 1 和 2 库存量的几种组合,见表 2。可

**表 2　反复试验得出的解**

**Tab.2 The result of trial and error solution**

| 备件 1 | | | 备件 2 | | | 系统 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | EBO($s$) | 费用/万元 | $s$ | EBO($s$) | 费用/万元 | EBO($s$) | 总费用/万元 |
| 2 | 0.104 | 10 | 7 | 0.085 | 7 | 0.189 | 17 |
| 4 | 0.004 | 20 | 6 | 0.195 | 6 | 0.199 | 26 |

以看出第 1 行的备件组合比较好,因为在这个组合下系统总的短缺数更少,且费用较低。

通过反复试验法得出的结果和计算过程都比较直观,但计算量大而且耗时,不是分析短缺数与费用关系的有效方式。下面该用边际分析法来分析[9],引入单位费用效应这一概念,即当选定一项备件作为库存,并追加一件时,所获得的每单位费用装备系统效能的增量可以表示为:

$$[\mathrm{EBO}(s-1)-\mathrm{EBO}(s)]/c$$

根据边际分析得出 2 项备件的边际增量,结果见表 3。

运用边际分析法分析短缺数与费用的关系,首先在每个边际增量列中选择增量最高的备件,然后去掉已选的增量值,对剩下的增量值进行比较,选择其中增量值最高的备件,以此类推,直到费用不够购买下一个备件时停止。此时的总短缺数即为各项备件的

**表 3　2 种备件的边际分析**

**Tab.3 The marginal analysis of two items**

| 库存量 $s$ | 备件 1 | | 备件 2 | |
|---|---|---|---|---|
| | EBO($s$) | [EBO($s$)−EBO($s$)]/5 | EBO($s$) | [EBO($s$)−EBO($s$)]/1 |
| 0 | 1.000 | | 4.000 | |
| 1 | 0.368 | 0.126 | 3.018 | 0.982 |
| 2 | 0.104 | 0.053 | 2.110 | 0.908 |
| 3 | 0.023 | 0.016 | 1.348 | 0.762 |
| 4 | 0.004 | 0.004 | 0.782 | 0.567 |
| 5 | 0.001 | | 0.410 | 0.371 |
| 6 | 0 | | 0.195 | 0.215 |
| 7 | 0 | | 0.085 | 0.111 |
| 8 | 0 | | 0.034 | 0.051 |
| 9 | 0 | | 0.012 | 0.021 |
| 10 | 0 | | 0.004 | 0.008 |

对应的 EBO 之和。

接下来结合上边实例进行边际分析,在备件采购之前,2 种备件的总短缺数为 1.000＋4.000＝5.0000。备件 1 和 2 中第 1 件边际增量分别为 0.126 与 0.982,因此挑选备件 2,这时总短缺数降为 1.000＋3.018＝4.018;向下移动到备件 2 的第 2 件,并将增量值 0.126 和 0.908 进行比较,再次选中备件 2,追加备件 2 第 2 件,总期望短缺数就变为 1.000＋2.110＝3.110。前 6 次比较结果都是选中备件 2,在此之后备件 1 的增量 0.126 超过了备件第 7 件的 0.111,这样备件 1 就紧接着追加第 1 件,以此类推下去。如果投资费用按 17 万元计算,备件 1 可以购买 2 件,备件 2 可以购买 7 件,此时总短缺数为 0.189,与在表 2 用反复试验求出的结果一致。

与反复试验法比较,边际分析法简单方便,而且计算量小,因此用边际分析法来分析费用与短缺数的关系更加可取、有效。

## 4　结语

通过结合建模、优化与排队论等理论和方法,解决了一个基于有限修理能力的非稳态需求的可修件库存问题,并通过实例分析对反复试验法和边际分析法进行了比较,结果表明,该研究能够在备件成本与短缺数之间寻求平衡点,具有一定的实用价值,为备件管理者进行库存决策提供了可靠的理论依据。

(下转第 119 页)

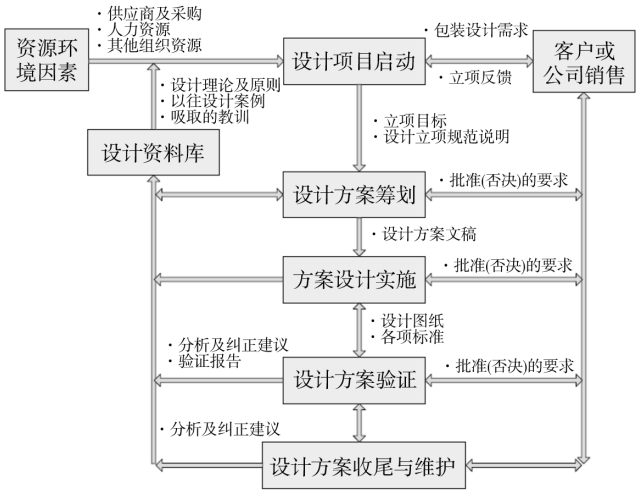


图 2　设计项目过程组之间的关系

Fig. 2 Relationship among design project process groups

2）设计方案验证。当验证过程中出现偏差或验证结果不符合要求时，就会对方案设计实施产生影响与反作用。在提交验证报告的同时，要对产生偏差的原因进行分析并提出纠正建议，分析的结果及纠正建议就会对设计方案筹划及方案设计实施产生变更请求，一旦变更成立，设计方案及设计实施就要修改，甚至重新筹划设计方案。

3）设计方案收尾与维护。这个过程组中涉及实际运输情况对设计方案的验证，会出现与设计方案验证过程同样的情况。

4）设计资料库与资源环境因素。作为独立于立项项目之外，但又与所有立项项目有关联的支持性环节，在整个项目实现过程中同样具有重要的作用。

## 4　结语

总之，整体包装解决方案业务模式随着运输包装业的发展，必将成为主流的业务模式，而方案设计及其相关资源会成为包装商的核心竞争力之一。设计管理的基本出发点是提高产品开发设计的效率[9]。引入项目管理的理论与方法，可以科学、有效地安排好设计任务（项目），合理地利用设计（人力）资源，可以形成快速、高效的方案设计响应机制，给业务创造最有效的技术支持；利于系统的评估包装设计方案，满足可持续包装发展的要求。

**参考文献：**

[1]　杨祖彬，戴宏民．“完整包装解决方案”对包装人才培养的新要求[J]．包装工程，2009，30(9)：203－205．

[2]　鄂玉萍，王志伟．整体包装解决方案理念之辨析[J]．包装工程，2008，29(10)：223－225．

[3]　李蓓蓓．绿色包装的评价手段——生命周期评价法[J]．包装工程，2002，23(4)：150－152．

[4]　邱菀华．现代项目管理学[M]．第 2 版．北京：科学出版社，2009．

[5]　戴宏民，戴佩华．产品整体包装解决方案的策划与设计[J]．中国包装，2009(5)：39－42．

[6]　宋伯慧，徐寿波．物流定义探讨[J]．北京交通大学学报(社会科学版)，2010(7)：26－29．

[7]　黄卫国．包装即服务[J]．包装世界，2009(11)：17－19．

[8]　刘佳娣，杨君顺．基于设计项目管理的新产品开发研究[J]．包装工程，2008，29(6)：179－181．

[9]　杨君顺，王肖烨．在企业中充分发挥设计管理的作用[J]．包装工程，2005，26(2)：110－112．

（上接第 111 页）

**参考文献：**

[1]　SHERBROOKE C C. 装备备件最优库存建模——多级技术[M]．第 2 版．北京：北京电子工业出版社，2004．

[2]　SLAY F M，BACHMAN T C，KLINE R C，et al. Optimizing Spares Support：The Aircraft Sustainability Model[J]. Logistcs Management Institute，1996(10)：22101－22805．

[3]　CARRILLO M J. Extensions of Palm's Theorem：a Revievw，Management Science，1991(37)：739－744．

[4]　陆传赉．排队论[M]．第 2 版．北京：北京邮电大学出版社，2009．

[5]　ALFREDSSON P. Optimization of Multi-echelon Repairable Item Inventory Systems with Simultaneous Location of Repair Facilities[J]. European Journal of Operational Research，1997(99)：584－595．

[6]　DIAZ A，FU M C. Models for Multi-echelon Repairable Item Inventory Systems with Limited Repair Capacity[J]. European Journal of Opetational Research，1997(97)：480－492．

[7]　ROTHKOPF M H，OREN S S. A Closure Approximation for the Nonstationary M/M/S Queue[J]. Management Science，1979(25)：522－534．

[8]　MATTA I，SHANKAR A U. Z-Iteration：a Simple Method for Throughput Estimation in Time-Dependent Multi-Class Systems[C]. Proc ACM SIGMETRICS/PERFORMANCE，Ottwa，1995.（余不详）

[9]　倪现存，左洪福．基于边际效应的民机备件库存优化模型[J]．交通运输工程学报，2008，8(4)：73－76．